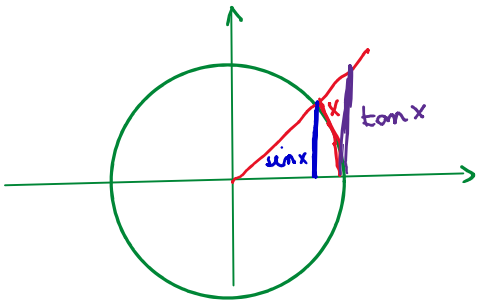
MATEMATICA - LEZIONE 22

venerdì 6 novembre 2026 11:05

Limiti notevoli

1) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (da non confondere con $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$)

DIM



$\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[$:

$\sin x \le x \le \tan x$

$x \le \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ da cui

$\cos x \le \frac{\sin x}{x}$

Quindi

$\cos x \le \frac{\sin x}{x} \le 1$ questa disug. vale $\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[$ ma anche per $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\setminus \{0\}$. perché queste funzioni sono pari.

$\lim_{x\to 0} \cos x > \cos 0 = 1$, $\lim_{x\to 0} 1 = 1$

Dal Teorema dei carabinieri : $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

2) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

DIM

$1-\cos x = (1-\cos x)\cdot \frac{1+\cos x}{1+\cos x} = \frac{1-\cos^2 x}{1+\cos x} = \frac{\sin^2 x}{1+\cos x}$

Quindi

$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)}$

$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \cdot \frac{1}{1+\cos x} = 1^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

($\frac{\sin x}{x} \to 1$, $1+\cos x \to 1$)

3) $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$

4) $\lim_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$

5) $\lim_{x \to 0} \frac{\arctan x}{x} = 1$

6) $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

7) $\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \qquad (a > 0)$

8) $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

9) $\lim_{x \to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a} \qquad (a > 0, a \neq 1)$

10) $\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha, \qquad \alpha \in \mathbb{R}$

I 10 limiti elencati sono corrispondono tutti a forme indeterminate del tipo $\frac{0}{0}$.

Limiti notevoli del tipo $1^{\pm\infty}$

1) $\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

2) $\lim_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

3) $\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

oss Se $f(x) > 0$, $f(x)^{g(x)} = e^{\ln\left(f(x)^{g(x)}\right)}$

$= e^{g(x) \ln f(x)}$

In particolare se $\lim_{x\to x_0} f(x) = 1$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$ allora $g(x)\ln f(x)$ è una forma indeterminata per $x\to x_0$. ($g(x)\to\pm\infty$, $\ln f(x)\to 0$)

Quindi **"$1^{\pm\infty}$" è una forma indeterminata**

Forme indeterminate per $f(x)^{g(x)}$ sono

$1^{\pm\infty}$, $(+\infty)^0$, 0^0

ESEMPI DI CALCOLO DI LIMITI CON LIMITI NOTEVOLI

1) $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{e^x-1} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}\cdot\frac{x}{e^x-1} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}\cdot\left(\frac{e^x-1}{x}\right)^{-1} = 1\cdot 1^{-1} = 1.$$

2) $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^3 x}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^3 x}{x^3}\cdot\frac{x^3}{x^2}\cdot\frac{x^2}{1-\cos x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3\cdot x\cdot\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right)^{-1}$$

$$= 1^3\cdot 0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 0$$

3) $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{x} = \lim_{x\to 0} 3\cdot\frac{\sin(3x)}{3x}$$

$$= 3\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{3x} \qquad (y = 3x)$$

$$= 3\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y} = 3\cdot 1 = 3.$$

OSS

Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$

1) $\lim_{x \to x_0} \frac{\sin(f(x))}{f(x)} = 1$ $\quad \left(y = f(x) : \lim_{x \to x_0} \frac{\sin(f(x))}{f(x)} = \lim_{y \to 0} \frac{\sin y}{y} = 1 \right)$

2) $\lim_{x \to x_0} \frac{1 - \cos f(x)}{f(x)^2} = \frac{1}{2}$

3) $\lim_{x \to x_0} \frac{\tan f(x)}{f(x)} = 1$

4) $\lim_{x \to x_0} \frac{\arcsin f(x)}{f(x)} = 1$

5) $\lim_{x \to x_0} \frac{\arctan f(x)}{f(x)} = 1$

6) $\lim_{x \to x_0} \frac{e^{f(x)} - 1}{f(x)} = 1$

7) $\lim_{x \to x_0} \frac{a^{f(x)} - 1}{f(x)} = \ln a$

8) $\lim_{x \to x_0} \frac{\ln(1 + f(x))}{f(x)} = 1$

9) $\lim_{x \to x_0} \frac{\log_a(1 + f(x))}{f(x)} = \frac{1}{\ln a}$

10) $\lim_{x \to x_0} \frac{(1 + f(x))^\alpha - 1}{f(x)} = \alpha$

ESEMPI

1) $\lim_{x \to 0} \frac{e^{\overbrace{-x^2}^{\to 0}} - 1}{\tan(\underbrace{2x^2}_{\to 0})} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{-x^2} - 1}{-x^2} \cdot \frac{(-x^2)}{2x^2} \cdot \frac{2x^2}{\tan(2x^2)}$

$= \lim_{x \to 0} \left(\underbrace{\frac{e^{-x^2} - 1}{-x^2}}_{\to 1} \right) \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) \cdot \left(\frac{\tan(2x^2)}{2x^2} \right)^{-1}$

$= 1 \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) \cdot 1^{-1} = -\frac{1}{2}$.

2) $\lim_{x \to 0} \frac{\cos(4x^2) - 1}{\arcsin(x^4)}$

$= \lim_{x \to 0} \frac{x^4}{\arcsin(x^4)} \cdot \frac{1}{x^4} \cdot \frac{(\cos(4x^2) - 1)}{16x^4} \cdot 16x^4$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{\arcsin(x^4)} \cdot \left(-\frac{1-\cos(4x^2)}{16x^4}\right) \cdot 16$$

$$= 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 16 = -8.$$

3) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$ ($\sin x$ è limitato e $x \to +\infty$)

non è il limite notevole.

4) $\lim_{x\to 1} \frac{\tan(x-1)}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\tan(x-1)}{x-1} \cdot \frac{x-1}{x^2-1}$ ($x-1 \to 0$, $\frac{\tan(x-1)}{x-1} \to 1$, $\frac{x-1}{x^2-1}$ è $\frac{0}{0}$)

$$= 1 \cdot \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$$

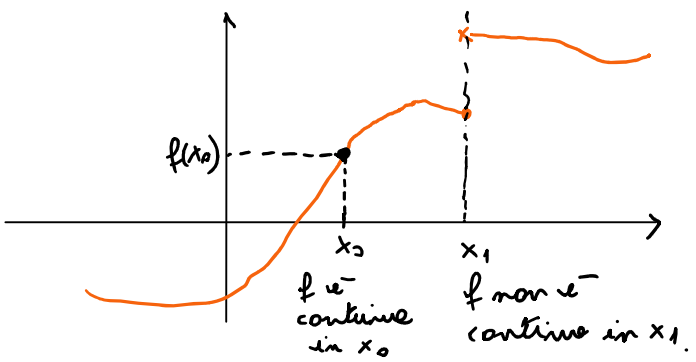
5) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(e^x)}{e^x} \overset{y=e^x}{=} \lim_{y\to+\infty} \frac{\sin y}{y} = 0$ (non è il limite notevole)

6) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(e^{-x})}{e^{-x}} \overset{y=e^{-x}}{=} \lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} = 1$ (limite notevole).

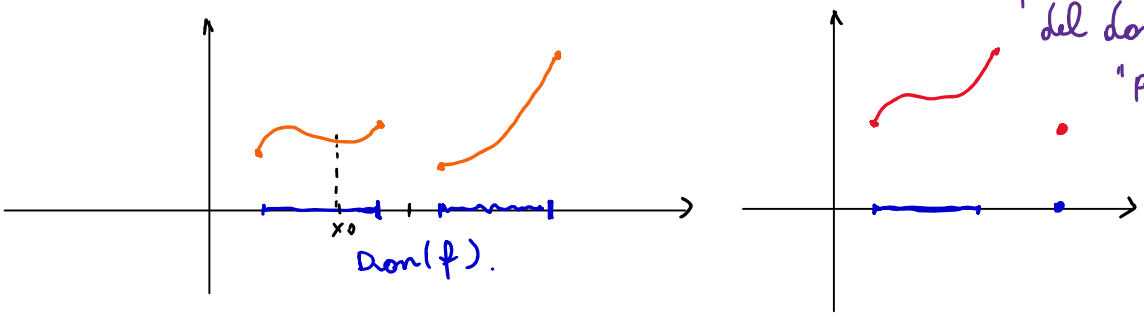
Funzioni continue

Def: Sia I un intervallo. Siano $f: I \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in I$. Si dice che f è CONTINUA IN x_0 se

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$



E se $Dom(f)$ non è un intervallo? Occorre distinguere i punti di accumulazione del dominio dai "punti isolati".



Def: Sia $X \subseteq \mathbb{R}$. Siano $f: X \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in X$. Si dice che f è continua in x_0 in uno dei seguenti casi:

1) $x_0 \notin Dr(X)$
2) $x_0 \in Dr(X)$ e $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

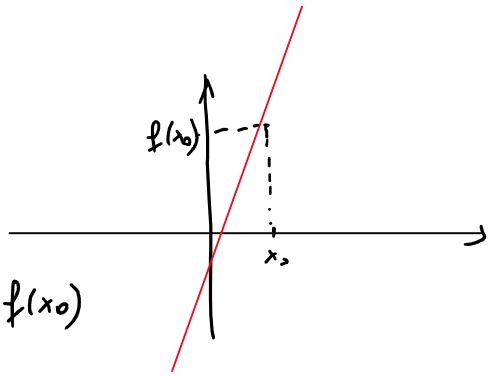
Def: Sia $f: X \to \mathbb{R}$. Si dice che f è continua in X se f è continua in tutti i punti di X.

ESEMPI

1) $f(x) = 3x - 1$

$\forall x_0 \in \mathbb{R}$

$\lim_{x \to x_0} 3x - 1 = 3x_0 - 1 = f(x_0)$

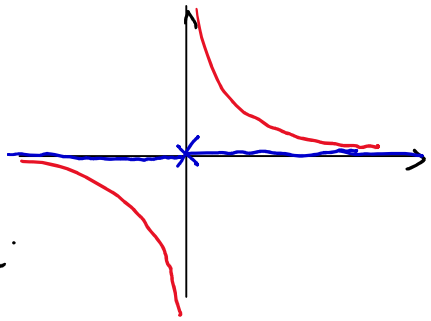


2) $f(x) = \frac{1}{x}$

$Dom(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$\forall x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$: $\lim_{x \to x_0} \frac{1}{x} = \frac{1}{x_0}$

quindi f è continua in tutti i punti del suo dominio



(e in 0? 0 non è un punto del dominio quindi l'affermazione sulla continuità non vale in 0).

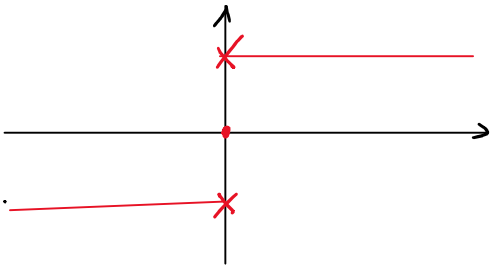
3) Le funzioni elementari:

$f(x) =$ $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, e^x, $\ln x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$, $\sqrt{x}$, x^2

sono tutte funzioni continue nel loro dominio

- La funzione segno NON È CONTINUA IN 0:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

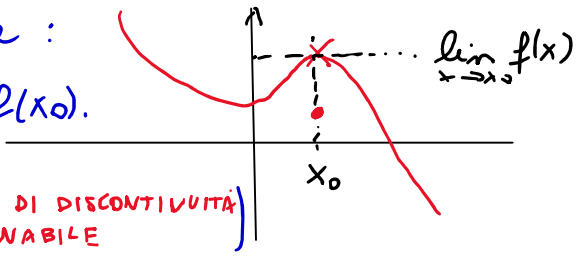


Punti di discontinuità:

Def: Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, sia $f: I \to \mathbb{R}$ una funzione. Sia $x_0 \in I$ si dice che x_0 è un punto di DISCONTINUITÀ PER f se f non è continua in x_0. Questo succede se:

1) $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = L \in \mathbb{R}$ ma $L \neq f(x_0)$.

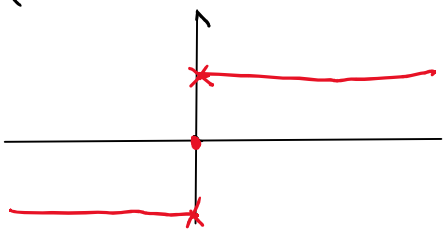
(in tal caso si dice che x_0 è un PUNTO DI DISCONTINUITÀ ELIMINABILE)

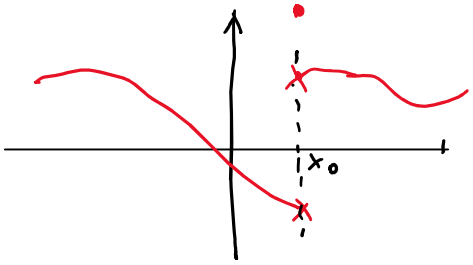


2) Se x_0 non è un estremo di I e

$\exists \lim_{x \to x_0^+} f(x) = L_1$, $\exists \lim_{x \to x_0^-} f(x) = L_2$ e $L_1, L_2 \in \mathbb{R}$ ma $L_1 \neq L_2$

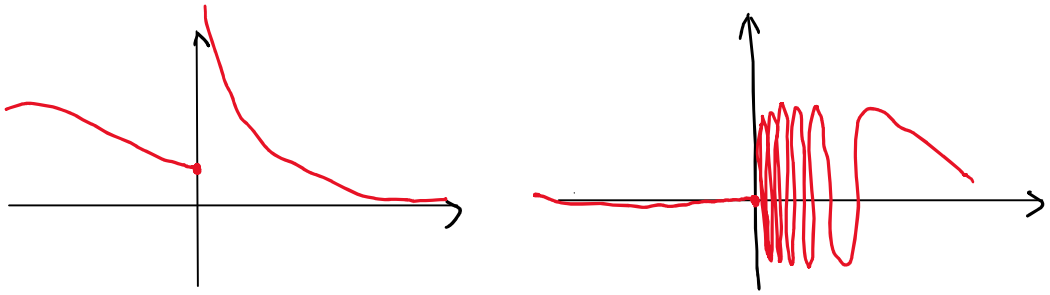
(si dice che x_0 è un PUNTO DI DISC. DI SALTO (DI I SPECIE)





3) Uno tra $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ e $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ (se calcolabili) è uguale a $\pm\infty$ oppure non esiste.

(in tal caso si dice che x_0 È UN PUNTO DI DISC. DI SECONDA SPECIE).



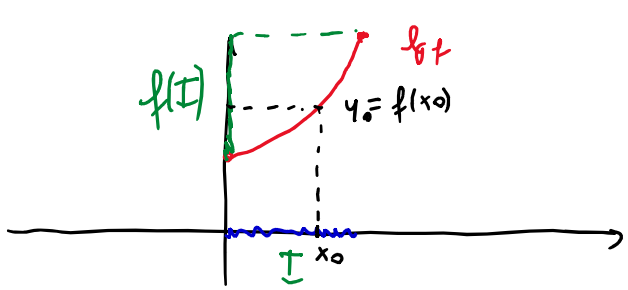
TEOREMA

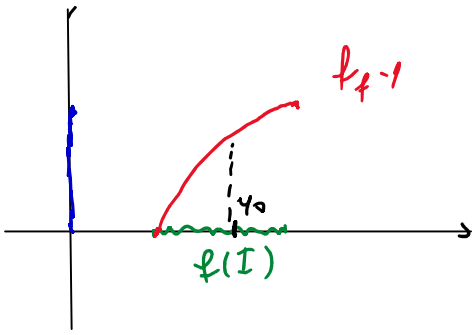
Siano $X \subseteq \mathbb{R}$, $f, g : X \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in X$.
Supponiamo che f e g siano continue in x_0.
Allora:

1) $f+g$ è continua in x_0
2) $f-g$ è continua in x_0
3) $f \cdot g$ è continua in x_0
4) Se $g(x_0) \neq 0$, allora $\frac{f}{g}$ è continua in x_0.

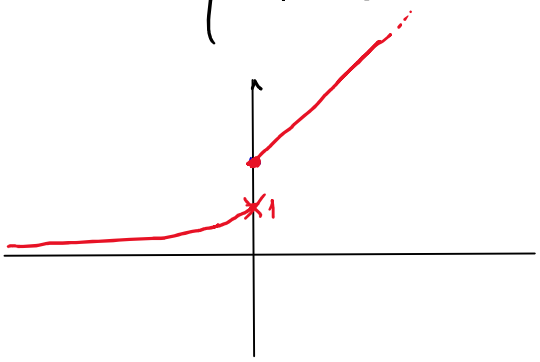
TEOREMA Siano $X, Y \subseteq \mathbb{R}$, siano $f : X \to \mathbb{R}$, $g : Y \to \mathbb{R}$ tali che $f(X) \subseteq Y$. Siano $x_0 \in X$ e $y_0 = f(x_0) \in Y$.
Se f è continua in x_0 e g è continua in y_0, allora $g \circ f$ è continua in x_0.

TEOREMA: Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo. Sia $f : I \to f(I)$ una funzione invertibile (biiettiva). Se f è continua in I, allora $f^{-1} : f(I) \to I$ è continua in $f(I)$.





$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{se } x < 0 \\ x + 2 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

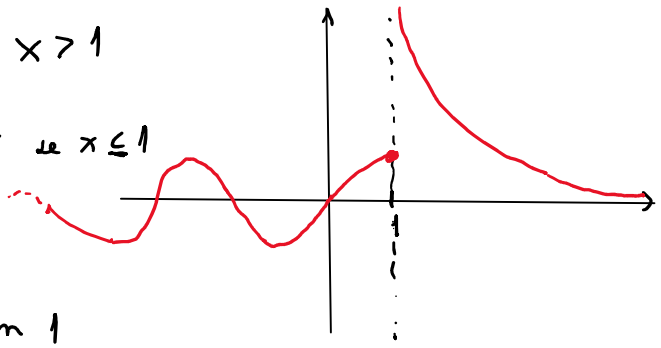


$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} e^x = e^0 = 1.$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (x+2) = 2$

$x_0 = 0$ è punto di disc. di salto.

- $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1} & x > 1 \\ \sin x & \text{se } x \leq 1 \end{cases}$



$\lim_{x \to 1^-} \sin x = \sin 1$

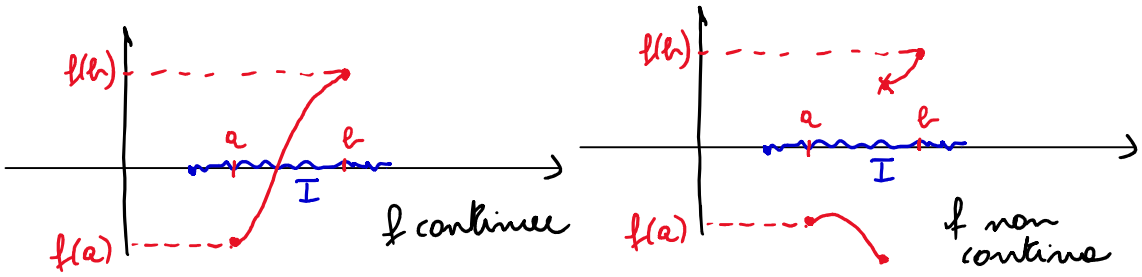
$\lim_{x \to 1^+} \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty.$

$x_0 = 1$ è punto di disc. di II specie.

Teoremi sulle funzioni continue

1) Teorema degli zeri
2) Teorema dei valori intermedi
3) Teorema di Weierstrass.

1)



TEOREMA (DEGLI ZERI)

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo. Sia $f: I \to \mathbb{R}$ una funzione continua in I. Se $\exists\, a, b \in I$ t.c. $a < b$ e $f(a) \cdot f(b) < 0$, allora $\exists\, x_0 \in]a, b[$ t.c. $f(x_0) = 0$.

$f(x) = e^x - x - 3$

Esistono degli zeri di f?

f è continua in $\mathbb{R}$.

($e^x - x - 3 = 0$

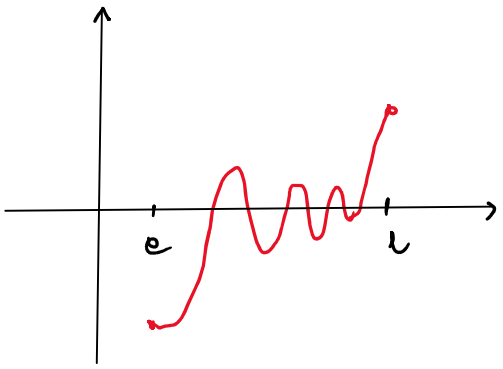
$e^x = x + 3$

non si riesce a risolvere esplicitamente)

$f(0) = e^0 - 0 - 3 = 1 - 3 = -2$

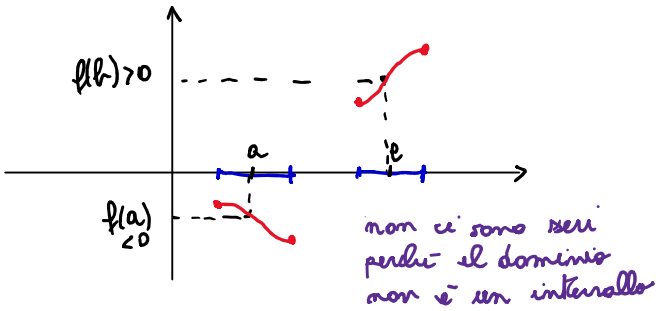
$f(3) = e^3 - 3 - 3 = e^3 - 6 > 2^3 - 6 = 8 - 6 = 2 > 0.$

Il teorema degli zeri ci dice che $\exists$ almeno uno zero di f in $]0, 3[$.



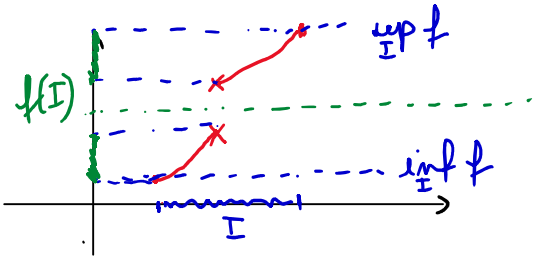
Nota: Il teorema garantisce l'esistenza di almeno uno zero. Ma possono esserci più zeri.

Nota 2 È importante che I sia un intervallo, altrimenti l'esistenza di uno zero non è garantita.



2) Teorema dei valori intermedi:

Se I è un intervallo e $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$, in generale, $f(I)$ non è necessariamente un intervallo.



(Se però f è continua in I allora $f(I)$ è un intervallo)

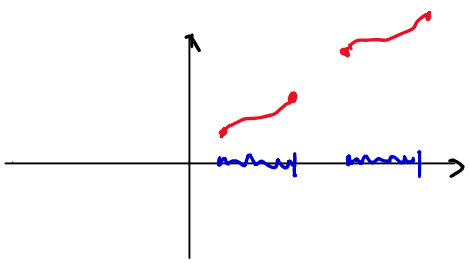
TEOREMA DEI VALORI INTERMEDI

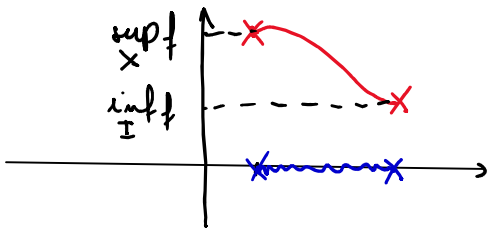
Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e sia $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua in I. Allora $f(I)$ è un intervallo

In particolare, o f è costante oppure:

$$\forall\ y \in \left]\inf_I f, \sup_I f\right[\quad \exists\ x \in I \ \text{t.c.}\ f(x) = y$$

È importante che I sia un intervallo





i valori $\sup_X f$ e $\inf_X f$ non sempre sono assunti assunti cioè non è detto che che $\exists$ punti di max o di min.

Se però I è chiuso e limitato allora anche $\sup_X f$ e $\inf_X f$ sono assunti.

3) TEOREMA DI WEIERSTRASS

Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a,b]$. Allora $\exists\ x_1, x_2 \in [a,b]$ tali che $f(x_1) = \inf_{[a,b]} f = \min_{[a,b]} f$ e

$$f(x_2) = \sup_{[a,b]} f = \max_{[a,b]} f$$

