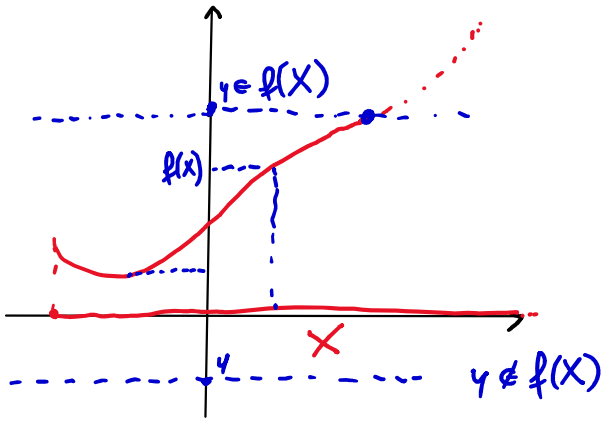
MATEMATICA - LEZIONE 16

martedì 27 ottobre 2026 19:30

Funzioni: $f: X \longrightarrow Y$

- Dominio, codominio, immagine, grafico.
- Funzioni iniettive, suriettive e biiettive
- Composizione di funzioni $(g \circ f)$
- Funzioni invertibili.



$$f(X) = \{ f(x) \mid x \in X \}$$

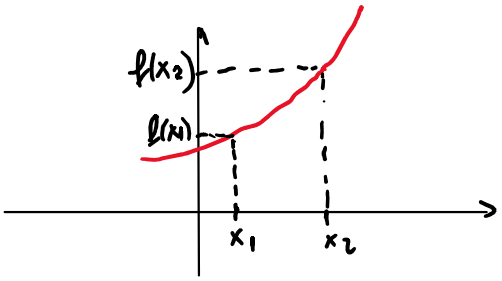
OSS
$y \in f(X) \iff$ la retta orizz. ad altezza y interseca il grafico di f.

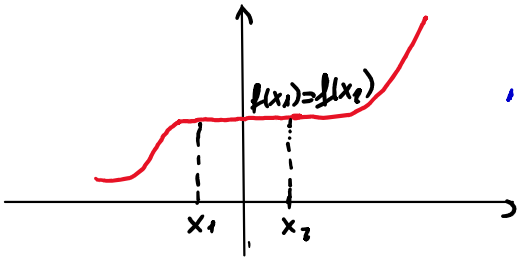
Proprietà delle funzioni (reali di variabile reale).

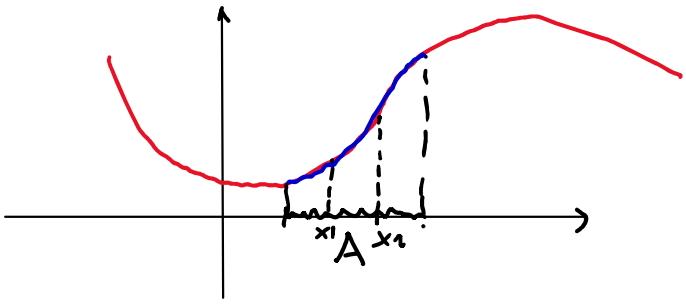
- Sia $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$.

DEF 1 Sia $A \subseteq X$, si dice che:

1) f è MONOTONA CRESCENTE (NON DECRESCENTE) in A
se $\forall x_1, x_2 \in A$: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$



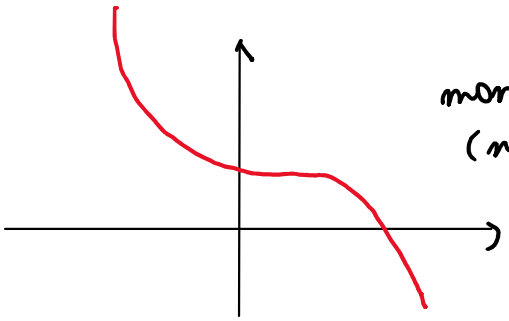




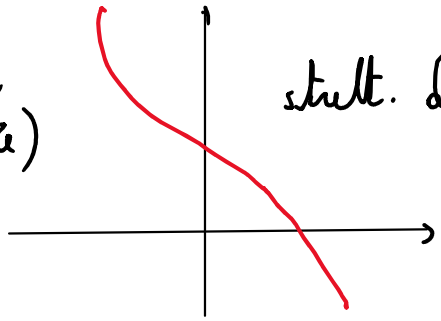
2) f è STRETTAMENTE MONOTONA CRESCENTE in A
se $\forall x_1, x_2 \in A$: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

3) f è MONOTONA DECRESCENTE (NON CRESCENTE) in A
se $\forall x_1, x_2 \in A$: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

4) f è STRETTAMENTE MONOTONA DECRESCENTE in A
se $\forall x_1, x_2 \in A$: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$



mon. decrescente
(non strettamente)



strett. decrescente

Simmetrie del grafico

Def: Un insieme $X \subseteq \mathbb{R}$ si dice SIMMETRICO RISPETTO A 0 se $\forall x \in X$: $-x \in X$.

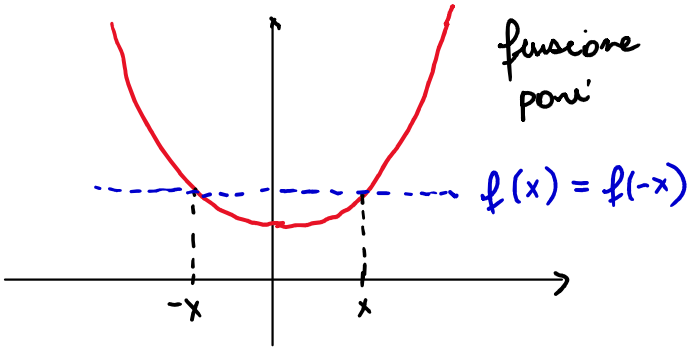
$X = [-1, 1]$ è simm.

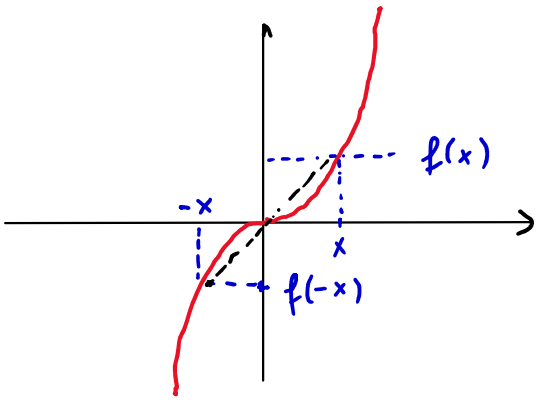
$X = [-1, 4]$ non è simmetrico

$X = \mathbb{Z}$ è simmetrico

$X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ è simmetrico

Def: Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ un <u>insieme simmetrico</u> risp. a 0 e sia $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$ (o in $Y \subseteq \mathbb{R}$). Si dice che f è PARI in X se $\forall\, x \in X$: $f(-x) = f(x)$. Si dice che f è DISPARI se $\forall\, x \in X$: $f(-x) = -f(x)$.





OSS

- Il grafico di una funzione pari è simmetrico rispetto all'asse y ($(x,y) \in Gf(f) \iff (-x,y) \in Gf(f)$)
- Il grafico di una funzione dispari è simmetrico rispetto a $(0,0)$. ($(x,y) \in Gf(f) \iff (-x,-y) \in Gf(f)$).

1) $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^2$ è pari.

Il dominio $\mathbb{R}$ è simmetrico

$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$.

2) $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^3$ è dispari.

$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$.

3) $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto |x|$ è pari:

$|-x| = |x|$

Funzioni periodiche:

Def: Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ e sia $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$. Sia $T > 0$

Si dice che f è T-PERIODICA se:

1) $\forall x \in X$: $x + T \in X$ e $x - T \in X$

2) $\forall x \in X$: $f(x+T) = f(x)$.

Se $\exists\, T$ tale che f è T-periodica allora possiamo considerare l'insieme $\{T > 0 \mid f \text{ è } T\text{-periodica}\}$

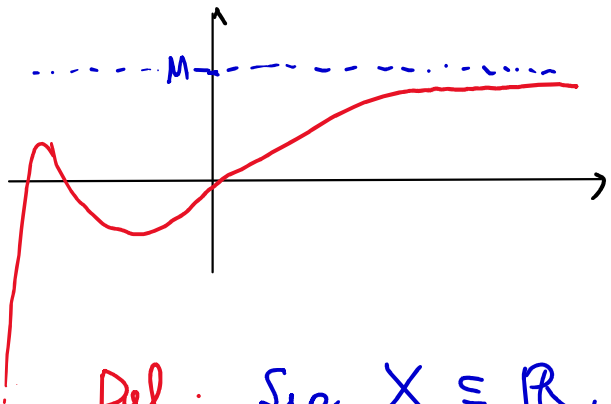
Se $\exists$ il minimo T_{MIN} di questo insieme, allora T_{MIN} si dice PERIODO MINIMO.

- $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \sin x$ (o $\cos x$) è periodica di periodo minimo 2π.
- $f: \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \tan x$ è periodica di periodo minimo π

Funzioni limitate.

Def: Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ e sia $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$. Si dice che f è LIMITATA SUPERIORMENTE se $\exists\, M > 0$ t.c.

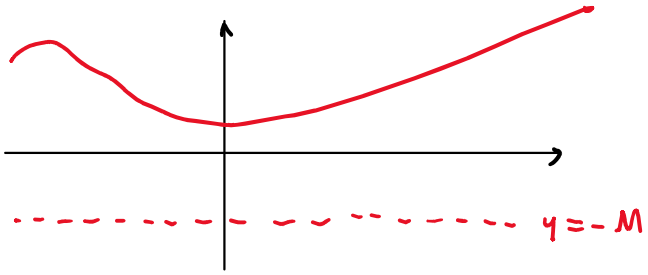
$\forall x \in X$: $f(x) < M$



Il grafico giace sotto una retta orizzontale

Def: Sia $X \subseteq \mathbb{R}$, sia $f: X \to \mathbb{R}$. Si dice che f è INFERIORMENTE LIMITATA se $\exists M > 0$, t.c.

$\forall x \in X : \quad f(x) > -M.$



il grafico si trova sopra ad una retta orizzontale

Def Sia $X \subseteq \mathbb{R}$, $f: X \to \mathbb{R}$ si dice LIMITATA si intende che f è sia limitata superiormente che inferiormente (cioè $\exists M > 0$ t.c. $-M < f(x) < M$ ovvero $|f(x)| < M$).

oss $f: X \to \mathbb{R}$ è limitata (superiormente, inferior. o in entrambi i modi) $\iff$ $f(X)$ è un insieme limitato (superiorm., inferior. o entrambi).

Def: Sia $f: X \to \mathbb{R}$ con $X \subseteq \mathbb{R}$. Definiamo

- ESTREMO INFERIORE DI f IN X la quantità:

$$\inf_X f := \inf f(X)$$

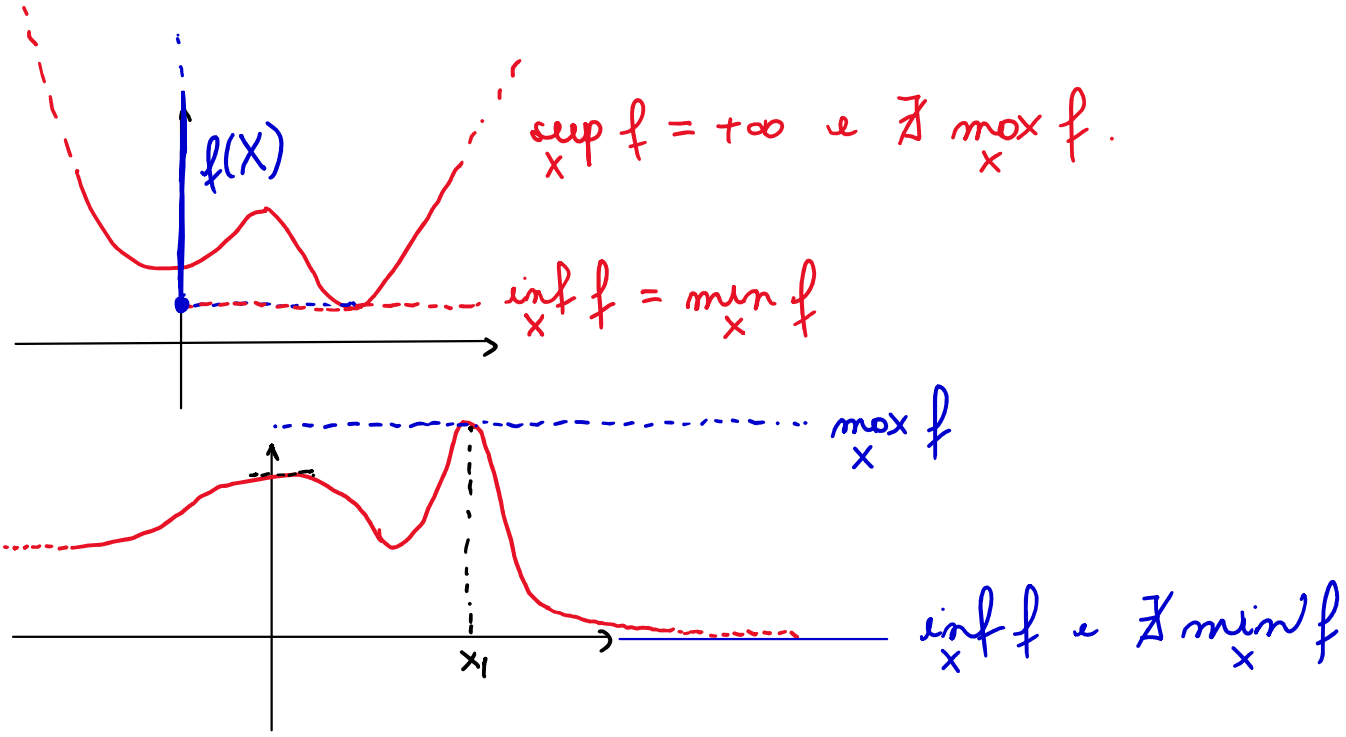
- ESTREMO SUPERIORE DI f IN X

$$\sup_X f := \sup f(X)$$

Se $\exists \max f(X)$ / $\min f(X)$ possiamo definire

MASSIMO DI f IN X : $\max_X f := \max f(X)$

MINIMO DI f IN X : $\min_X f := \min f(X)$



$\sup_X f = +\infty$ e $\nexists \max_X f$.

$\inf_X f = \min_X f$

$\max_X f$

$\inf_X f$ e $\nexists \min_X f$

OSS

$\exists \max_X f \iff \exists\, x_1 \in X$ t.c. $f(x_1) = \sup_X f$

In tal caso $\max_X f = \sup_X f$

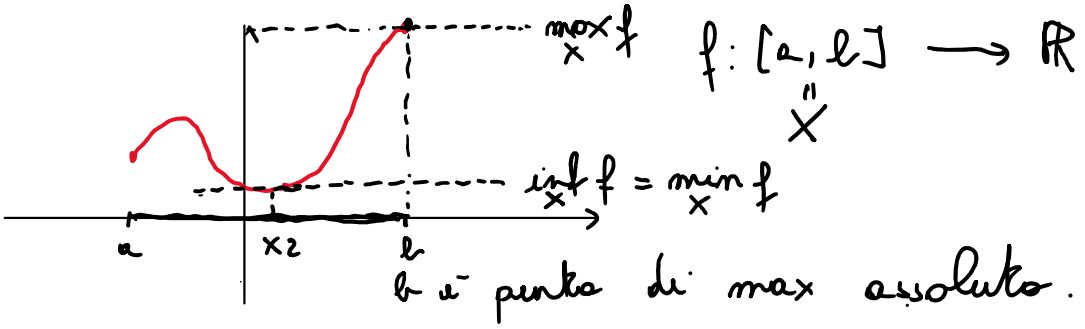
Def: Un punto $x_1 \in X$ t.c. $f(x_1) = \sup_X f = \max_X f$ è detto PUNTO DI MASSIMO ASSOLUTO PER f.

OSS

$\exists \min_X f \iff \exists\, x_2 \in X$ t.c. $f(x_2) = \inf_X f$

In tal caso $\min_X f = \inf_X f$.

Def: Un punto $x_2 \in X$ t.c. $f(x_2) = \inf_X f$ si dice un PUNTO DI MINIMO ASSOLUTO PER f in X.



b è punto di max assoluto.

Per le funzioni reali di variabile reale spesso dominio e codominio non specificati e viene dato solo l'espressione di $f(x)$. In questo caso si intende che:

- Come dominio si prende il più grande sottoinsieme di $\mathbb{R}$ in cui f è ben definita. Tale insieme è detto DOMINIO NATURALE / CAMPO DI ESISTENZA di f (si indica con $Dom(f)$)
- Come codominio si prende $Y = \mathbb{R}$.

ESEMPI

1) $f(x) = 3x - 2$

Intendiamo $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto 3x - 2$

2) $f(x) = \dfrac{1}{3x-2}$

c.e.: $3x - 2 \neq 0$

$x \neq \frac{2}{3}$

intendiamo:

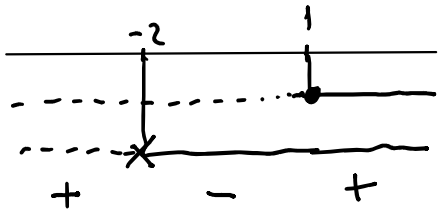
$$f: \mathbb{R}\setminus\left\{\tfrac{2}{3}\right\} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{1}{3x-2} \qquad \mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}\setminus\left\{\tfrac{2}{3}\right\},$$

3) $f(x) = \tan x$

$$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}\setminus\left\{\tfrac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$$

4) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+2}}$

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{x+2} \geq 0 \\ x+2 \neq 0 \longrightarrow x \neq -2 \end{cases}$$

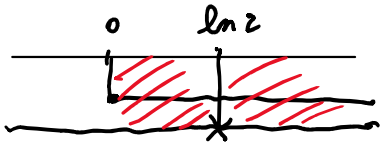


$x < -2 \quad \vee \quad x \geq 1.$

Quindi $\mathrm{Dom}(f) =]-\infty, -2[\cup [1, +\infty[$

5) $f(x) = \dfrac{\sqrt[6]{x}}{e^x - 2}$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ e^x \neq 2 \iff x \neq \ln 2 \end{cases}$$



$$\mathrm{Dom}(f) = [0, +\infty[\setminus \{\ln 2\}$$
$$= [0, \ln 2[\cup]\ln 2, +\infty[.$$

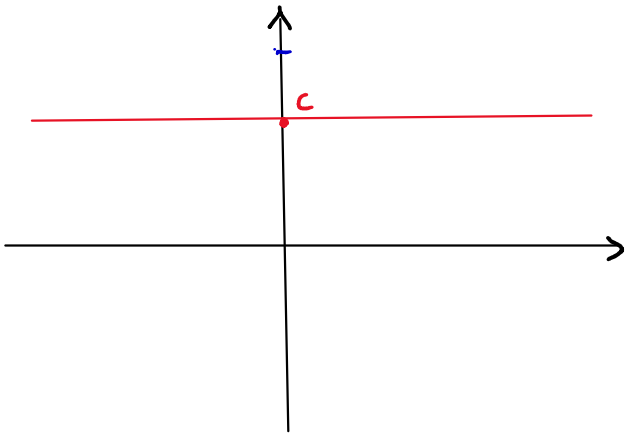
Principali condizioni da verificare

1) denominatori $\neq 0$.
2) argomenti delle radici di indice pari devono essere ≥ 0.
3) argomenti dei logaritmi devono essere > 0.

Funzioni Elementari

1. Funzioni costanti

$f(x) = c \in \mathbb{R}$.

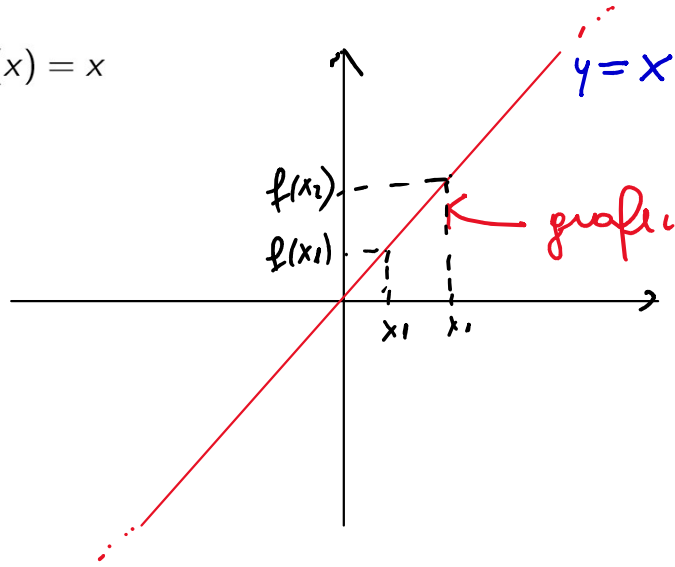


Il grafico di f è una retta orizzontale ad altezza c.

- $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$
- $f(\mathbb{R}) = \{c\}$.
- è limitata
- è pari.
- è monotona sia crescente che decrescente.

2. Funzione identità di $\mathbb{R}$ ($\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$)

$f(x) = x$



- $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$
- $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$
- f è dispari
- f è strett. crescente

- Il grafico di f è la bisettrice del primo e terzo quadrante.
- la funzione identità è indicata anche con $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$.

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) = x_1 \,,\ f(x_2) = x_2$$
$$\Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

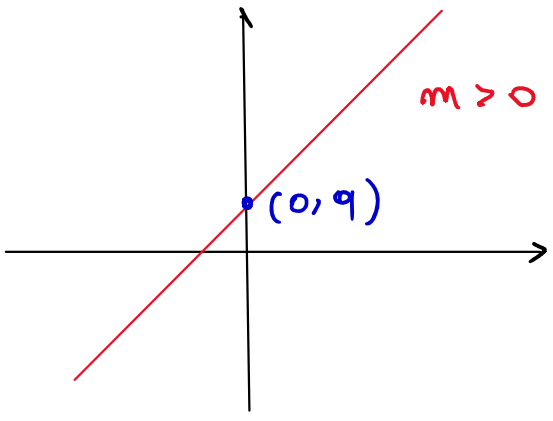
3. Funzioni affini da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$

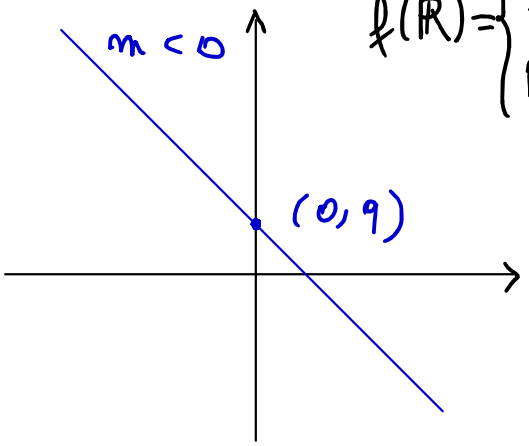
Siano $m, q \in \mathbb{R}$. Consideriamo la funzione $f_{m,q}(x) = mx + q$.

- m è detto coefficiente angolare
- q è detto termine noto

$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$

$f(\mathbb{R}) = \begin{cases} \{q\} & \text{se } m = 0 \\ \mathbb{R} & \text{se } m \neq 0 \end{cases}$



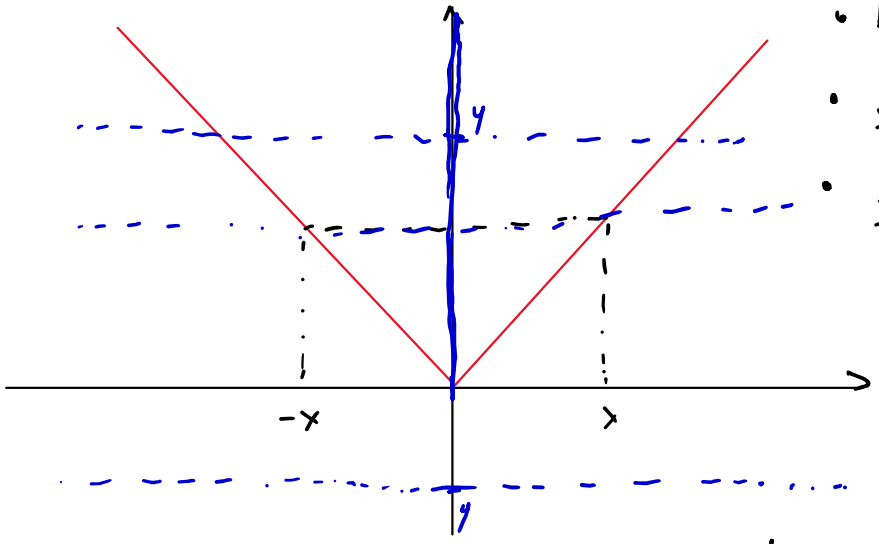


Il grafico di f è una retta di coefficiente angolare m che interseca l'asse verticale nel punto $(0, q)$.

f è monotona strett. crescente se $m > 0$
" " decrescente se $m < 0$.

4. Funzione Valore Assoluto

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0, \\ -x & \text{se } x < 0. \end{cases}$$



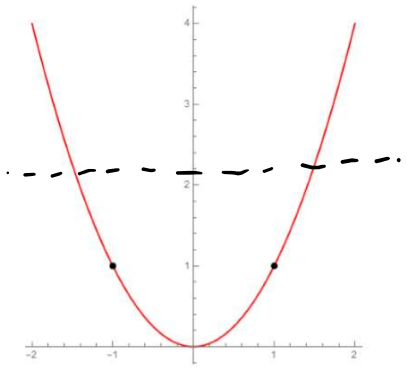
- $Dom(f) = \mathbb{R}$
- f è pari
- $f(\mathbb{R}) = [0, +\infty[$

f è mon. strett. crescente in $[0, +\infty[$
" " decrescente in $]-\infty, 0]$

5. Potenze con esponente naturale $n \geq 2$

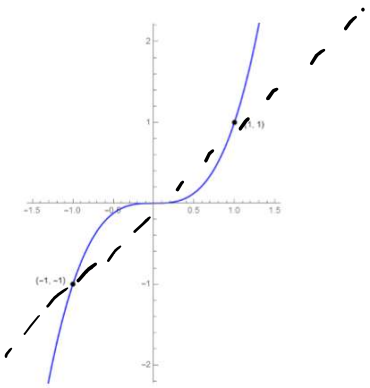
$f(x) = x^n$ con $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

n pari



- f è pari
- $f(\mathbb{R}) = [0, +\infty[$
- f non è monotona

n dispari

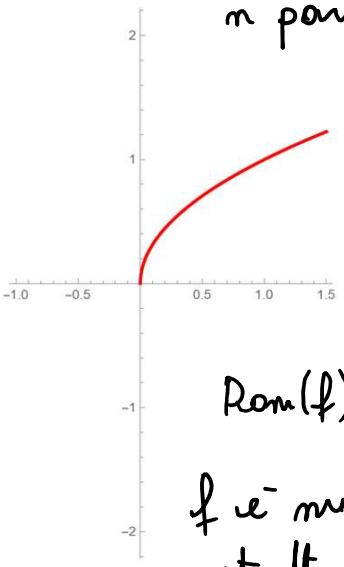


f è dispari
$f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$
f è monotona strett. crescente

6. Funzione Radice $n-esima$ $(n \geq 2)$

$f(x) = \sqrt[n]{x}$ con $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

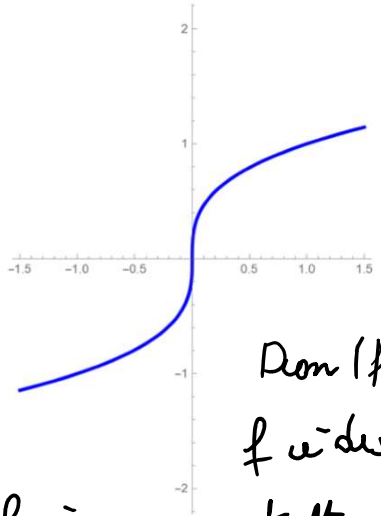
n pari



$Dom(f) = [0, +\infty[$

f è monotona strett. crescente

n dispari



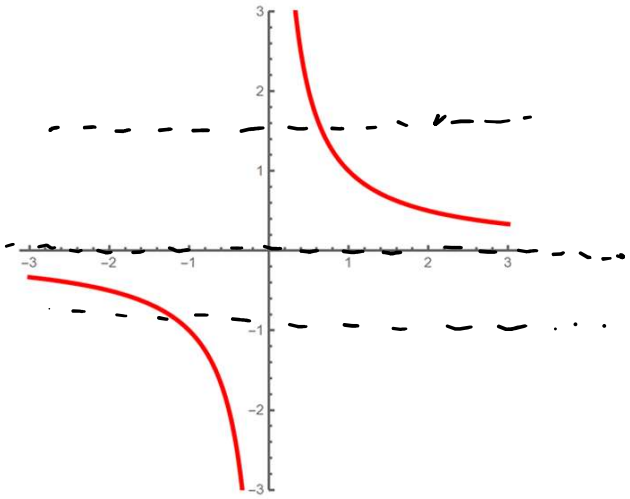
$Dom(f) = \mathbb{R}$

f è dispari

f è non. strett. crescente

7. Funzione reciproco

$$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$$



$Dom(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$f(\mathbb{R} \setminus \{0\}) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

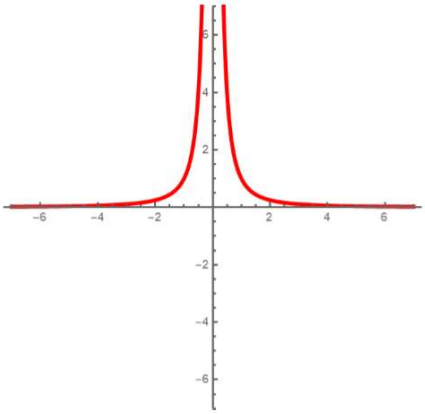
f è dispari.

8. Potenze con esponente intero negativo

$f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$, con $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

Dom $(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

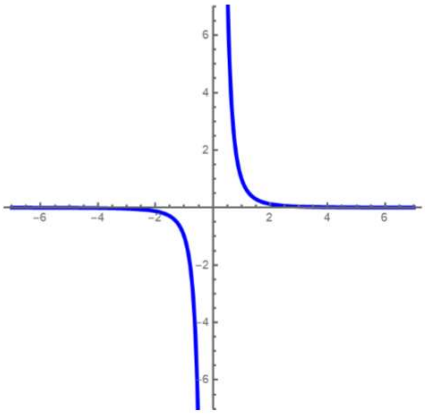
n pari



f pari.

$f(\mathbb{R}\setminus\{0\}) =]0,+\infty[$

n dispari

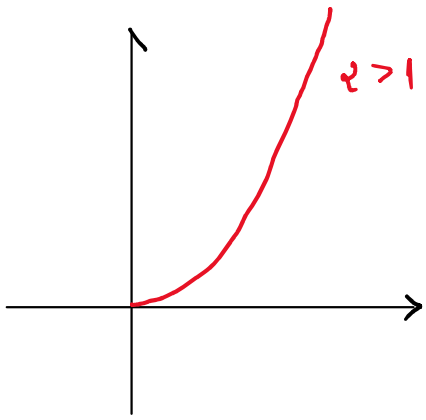


f è dispari

$f(\mathbb{R}\setminus\{0\}) = \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

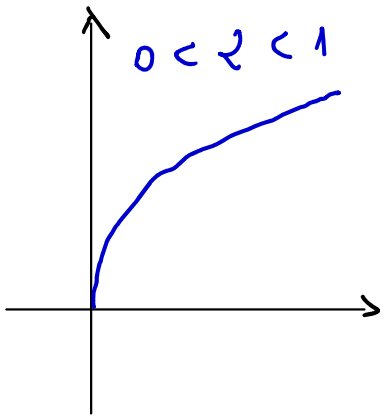
9. Potenze con esponente reale (non intero)

Sia $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Consideriamo la funzione $f(x) = x^\alpha$



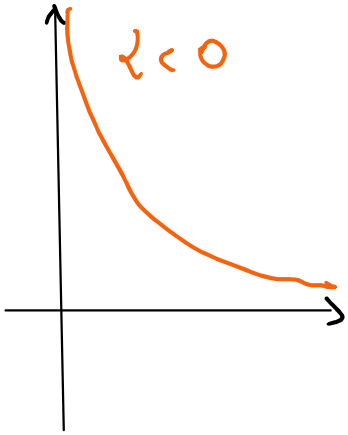
Dom$(f) = [0,+\infty[$

$f([0,+\infty[) = [0,+\infty[$



Dom$(f) = [0,+\infty[$

$f([0,+\infty[) = [0,+\infty[$



Dom$(f) =]0,+\infty[$

$f(]0,+\infty[) =]0,+\infty[$

10. Funzioni esponenziali

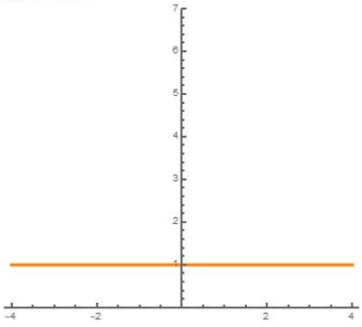
$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$

se $a \neq 1$

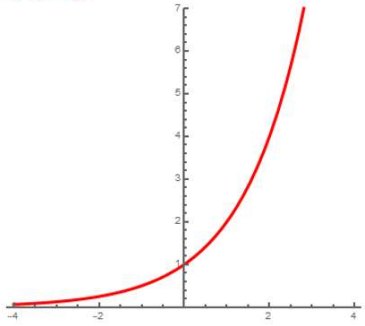
$f(\mathbb{R}) =]0,+\infty[$

Sia $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Consideriamo la funzione $f(x) = a^x = \exp_a(x)$

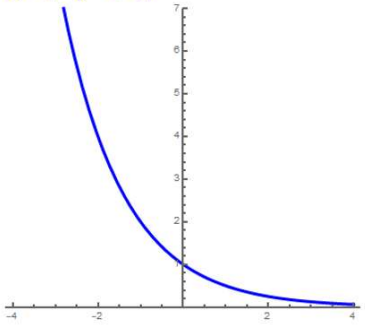
$a = 1$



$a > 1$



$0 < a < 1$

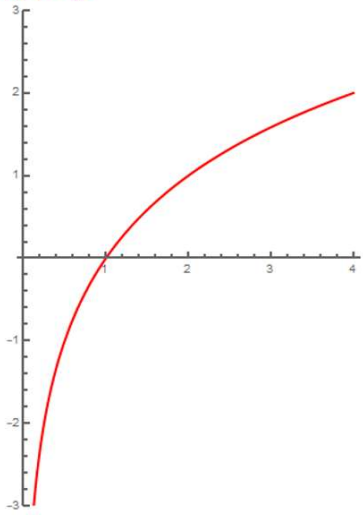


- Se $a = 1$, $\exp_1$ è la funzione costante 1.
- Se $a > 1$, $\exp_a$ è monotona strettamente crescente.
- Se $0 < a < 1$, $\exp_a$ è monotona strettamente decrescente.
- Se $a \neq 1$, $\exp_a$ è invertibile e ha per inversa la funzione logaritmo in base a.
- Ricordare: se $a > 1$, $\exp_a$ cresce più rapidamente di qualsiasi potenza.

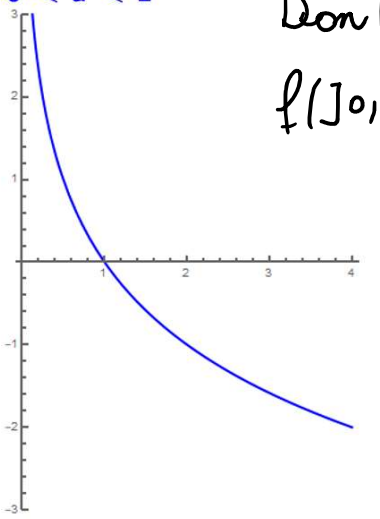
11. Logaritmo in base a

Sia $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$. Consideriamo la funzione $f(x) = \log_a(x)$

$a > 1$



$0 < a < 1$



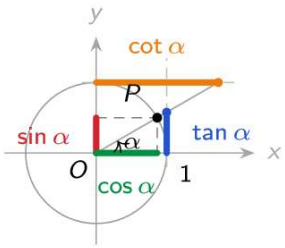
$\mathrm{Dom}(f) =]0,+\infty[$

$f(]0,+\infty[) = \mathbb{R}$.

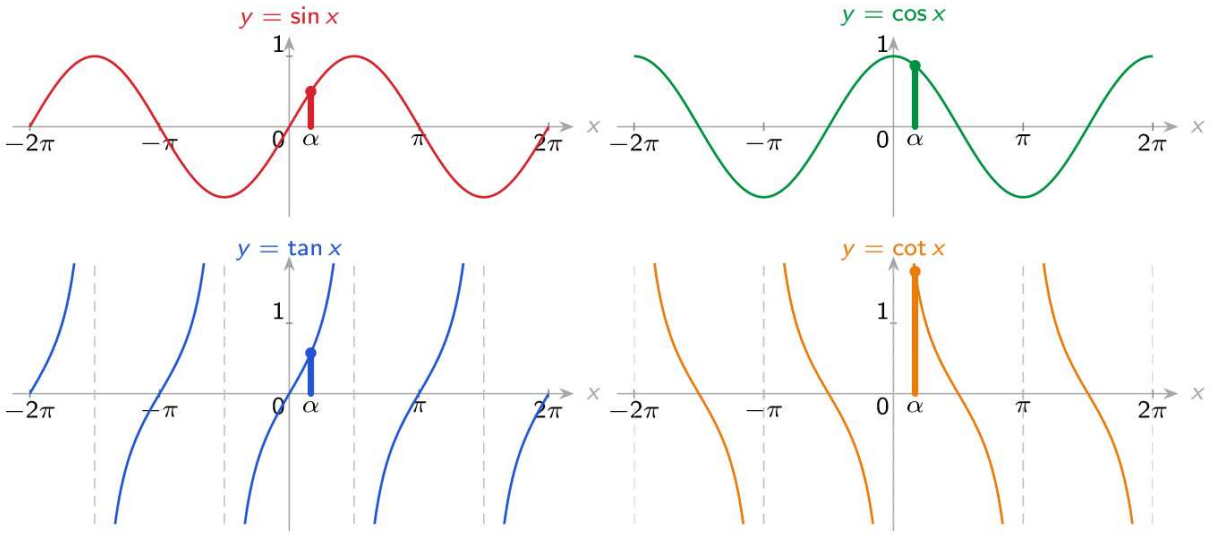
- Se $a > 1$, $\log_a$ è monotona strettamente crescente.
- Se $0 < a < 1$, $\log_a$ è monotona strettamente decrescente.

Funzioni Trigonometriche

Circonferenza unitaria

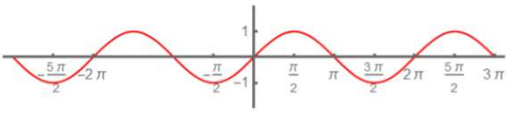


$P = (\cos\alpha, \sin\alpha)$

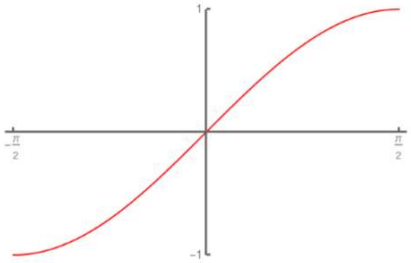


12 Funzione seno

$$\sin : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & [-1,1] \\ x & \longmapsto & \sin x \end{array}$$



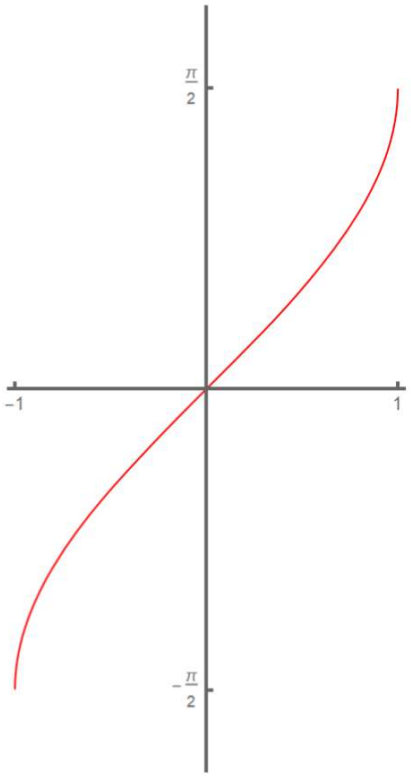
- sin è dispari
- sin è limitata $(-1 \leq \sin x \leq 1)$
- sin è periodica di periodo minimo 2π.
- $\sin|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]} : [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$ è una funzione invertibile.



La funzione inversa della restrizione $\sin|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}$ è la funzione Arcoseno.

13 Funzione arcoseno

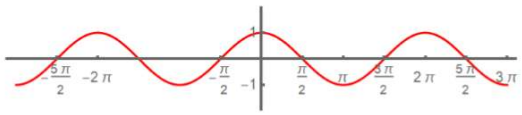
$$\arcsin : \begin{array}{ccc} [-1,1] & \longrightarrow & [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] \\ x & \longmapsto & \arcsin x \end{array}$$



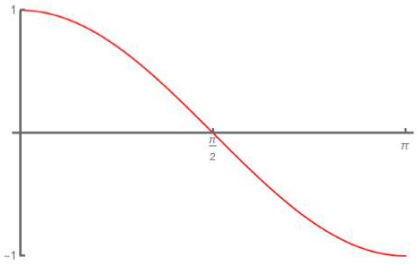
- arcsin è definita solo per $-1 \leq x \leq 1$.
- arcsin è limitata $(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2})$
- arcsin è monotona strettamente crescente.
- arcsin è dispari.

14 Funzione coseno

$$\cos : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & [-1,1] \\ x & \longmapsto & \cos x \end{array}$$



- cos è pari
- cos è limitata ($-1 \leq \cos x \leq 1$)
- cos è periodica di periodo minimo 2π.
- $\cos|_{[0,\pi]} : [0,\pi] \to [-1,1]$ è una funzione invertibile.

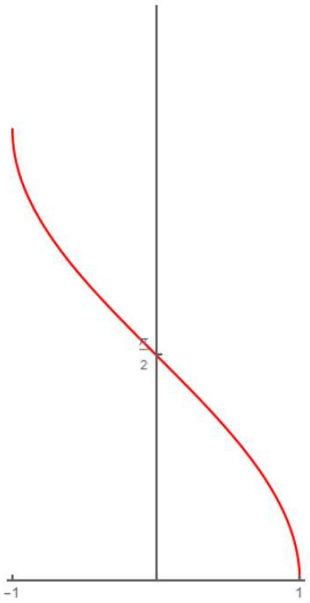


L'inversa della restrizione $\cos|_{[0,\pi]}$ è la funzione Arcocoseno.

15 Funzione arcocoseno

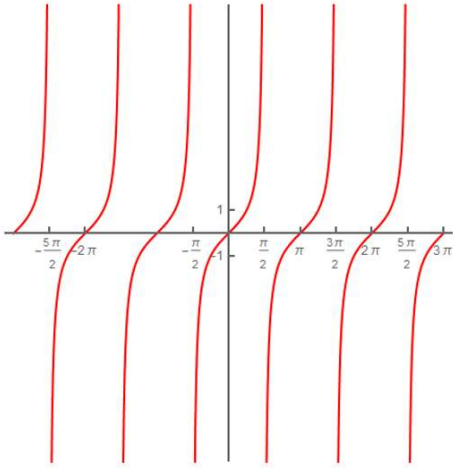
$$\arccos : \begin{array}{ccc} [-1,1] & \longrightarrow & [0,\pi] \\ x & \longmapsto & \arccos x \end{array}$$

- arccos è definita solo per $-1 \leq x \leq 1$.
- arccos è limitata ($0 \leq \arccos x \leq \pi$)
- arccos è monotona strettamente descrescente.
- arccos NON è pari.



16 Funzione tangente

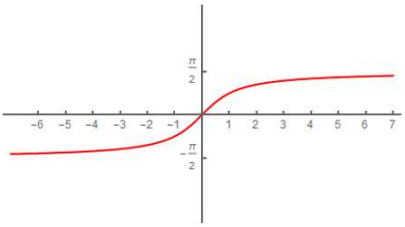
$$\begin{array}{rccc} \tan: & \mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2}+k\pi \ : \ k\in\mathbb{Z}\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \end{array}$$



- tan è dispari
- tan è periodica di periodo minimo π.
- $\tan|_{]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[} :]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ è una funzione invertibile e ha per inversa la funzione arcotangente.

17 Funzione arcotangente

$$\begin{array}{rccc} \arctan: & \mathbb{R} & \longrightarrow &]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\\ & x & \longmapsto & \arctan x \end{array}$$



- arctan è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$.
- arctan è limitata $(-\frac{\pi}{2} < \arctan x < \frac{\pi}{2})$
- arctan è monotona strettamente crescente.
- arctan è dispari.

18. Funzione segno

Consideriamo sgn : $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & sgn(x), \end{array}$ dove $sgn(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0, \\ 0 & \text{se } x = 0, \\ -1 & \text{se } x < 0. \end{cases}$

