MATEMATICA - LEZIONE 15

lunedì 26 ottobre 2026 09:06

ESEMPIO DI ESERCIZIO DI ESAME:

Sia $z = \dfrac{6+7i}{1+2i}$

1) Determinare la forma algebrica di z.
2) Determinare la forma esponenziale e algebrica di $(z-3)^9$

1) $z = \dfrac{6+7i}{1+2i} \cdot \dfrac{1-2i}{1-2i} = \dfrac{6+7i-12i-14i^2}{1-(2i)^2}$ ($+14$; $+4$)

$= \dfrac{20-5i}{5} = 4-i$

$(\mathrm{Re}(z) = 4, \quad \mathrm{Im}(z) = -1)$

2) $z-3 = 4-i-3 = 1-i$

$|z-3| = |1-i| = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$

$\arg(z-3) = -\dfrac{\pi}{4} \quad \cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \quad e \quad \sin\theta = \dfrac{-1}{\sqrt{2}}$

$z-3 = \sqrt{2}\, e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$

$(z-3)^9 = (\sqrt{2})^9 e^{i\left(-\frac{9\pi}{4}\right)}$

$= 16\sqrt{2}\, e^{-i\frac{9\pi}{4}}$ (FORMA ESP. DI $(z-3)^9$)

$= 16\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{9\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{9}{4}\pi\right)\right)$

$= 16\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{9}{4}\pi\right) - i\sin\left(\frac{9}{4}\pi\right)\right)$

$= 16\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$ $\left(\frac{9}{4}\pi = \frac{\pi}{4} + 2\pi\right)$

$= 16\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$= 16 - 16i$. (FORMA ALGEBRICA di $(z-3)^9$)

Aggiungiamo anche altre due richieste all'esercizio:

3) Scrivere in forma esponenziale le radici quinte di z.

4) Scrivere in forma algebrica le radici quarte di z^4.

---

3) $z = 4 - i$

$|z| = \sqrt{16+1} = \sqrt{17}$

$\cos\theta = \frac{4}{\sqrt{17}}$, $\sin\theta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$, $\theta = \arctan\left(-\frac{1}{4}\right)$

$z = \sqrt{17}\, e^{i \arctan(-\frac{1}{4})}$

Le radici quinte sono:

$\sqrt[5]{\sqrt{17}}\, e^{i\left(\frac{\arctan(-\frac{1}{4})}{5} + \frac{2k\pi}{5}\right)}$

$= \sqrt[10]{17}\, e^{i\left(\frac{\arctan(-\frac{1}{4})}{5} + \frac{2k\pi}{5}\right)}$

$k = 0, 1, 2, 3, 4.$

4) Radici quarte di z^4:

$z = |z| e^{i\theta}$ $\quad |z| = \sqrt{17}$, $\theta = \arctan\left(-\frac{1}{4}\right)$

$z^4 = |z|^4 e^{i 4\theta}$

Radici quarte di z^4:

$\sqrt[4]{|z|^4}\, e^{i\left(\theta + \frac{2k\pi}{4}\right)}$ $\quad k = 0, 1, 2, 3$

$= |z| e^{i\theta + \frac{k\pi}{2} i}$

$$= |z| e^{i\varphi} e^{i\frac{k\pi}{2}}$$

$$= 2 e^{i\frac{k\pi}{2}}$$

$$= (4 - i) e^{i\frac{k\pi}{2}}$$

$1 \quad (k=0)$

$i \quad (k=1)$

$-1 \quad (k=2)$

$-i \quad (k=3)$

4 radici quarte:

- $4 - i$
- $(4 - i) \cdot i = 4i - i^2 = 1 + 4i$
- $(4 - i) \cdot (-1) = -4 + i$
- $(4 - i) \cdot (-i) = -1 - 4i$.

Funzioni.

Def. Siano X, Y due insiemi, una FUNZIONE di DOMINIO X e CODOMINIO Y è una legge che ad ogni elemento $x \in X$ associa un elemento $f(x) \in Y$. (un solo elemento).

Notazione: le funzioni si indicano con

$f: X \longrightarrow Y$ o $f: X \longrightarrow Y$, $x \longmapsto f(x)$

- $f(x)$ è detto VALORE di f in x.
- **Def.** Sia $f: X \longrightarrow Y$ una funzione, definiamo IMMAGINE di f l'insieme

$$f(X) = \{ f(x) \mid x \in X \}.$$

Più in generale dato $A \subseteq X$, denotiamo:

$$f(A) = \{ f(x) \mid x \in A \}$$ (IMMAGINE DI A TRAMITE f)

• **Def** Sia $f: X \longrightarrow Y$. Si definisce GRAFICO di f l'insieme

$$Gf(f) = \{ (x, f(x)) \mid x \in X \} \subseteq X \times Y$$

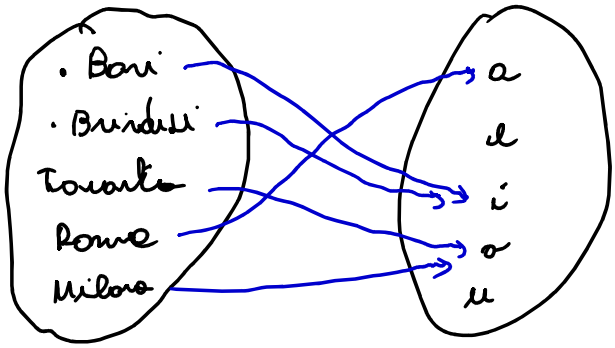
ESEMPI

$X = \{$ Bari, Brindisi, Taranto, Roma, Milano $\}$

$Y = \{ a, e, i, o, u \}$,

$$f: X \longrightarrow Y$$
$$x \longmapsto \text{vocale finale di } x.$$

$f(\text{Bari}) = i$
$f(\text{Brindisi}) = i$
$f(\text{Taranto}) = o$
$f(\text{Roma}) = a$
$f(\text{Milano}) = o$



$f(X) = \{ a, i, o \}$.

$Gf(f) = \{$ (Bari, i), (Brindisi, i), (Taranto, o), (Roma, a), (Milano, o) $\}$.

ESEMPIO 2

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto x+1$$

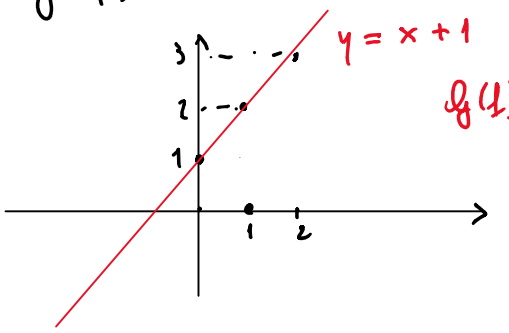
$f(1) = 2$

$f(2) = 3$

$f(\pi) = \pi + 1$

$\vdots$

$Gf(f) \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ piano cartesiano



$y = x + 1$ (eq. del grafico)

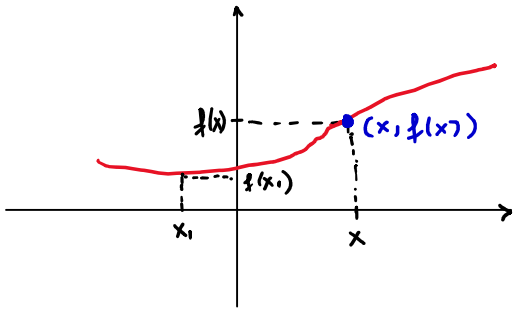
$Gf(f) = \{(x, x+1) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

Tipi particolari di funzioni

- **FUNZIONI REALI DI VARIABILE REALE** Sono funzioni

$f: X \to Y$ con $X, Y \subseteq \mathbb{R}$.

Il grafico è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$



- **FUNZIONI REALI DI PIÙ VARIABILI REALI**

Sono funzioni $f: X \to Y$, $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ e $Y \subseteq \mathbb{R}$.

$X \subseteq \mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$.

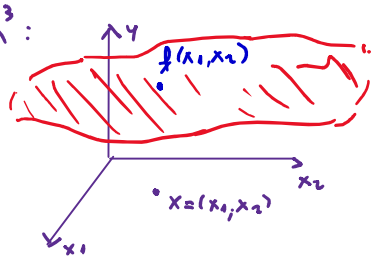
$$f: X \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x_1, \ldots x_n) \longrightarrow f(x_1, \ldots, x_n)$$

ESEMPIO

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x_1, x_2) \longmapsto \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

Nota: il grafico è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^{n+1}$

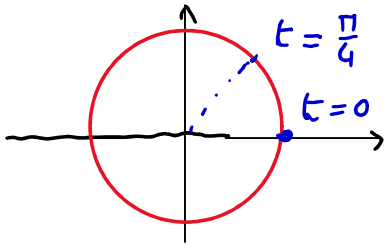
Se $n = 2$ è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$:



- **CURVE IN $\mathbb{R}^m$** Sono funzioni $f: X \longrightarrow \mathbb{R}^m$ con $X \subseteq \mathbb{R}$ (spesso X è un intervallo).

ESEMPIO

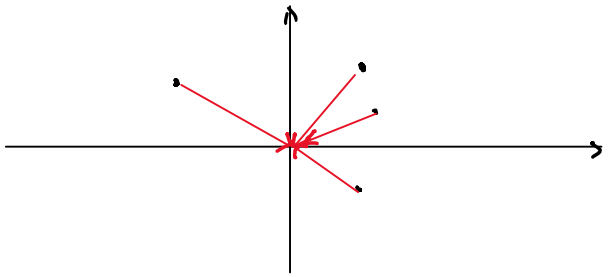
$$f: [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \longmapsto (\cos t, \sin t)$$



- **CAMPI VETTORIALI**: funzioni $f: X \longrightarrow Y$ con $X, Y \subseteq \mathbb{R}^m$

ESEMPIO

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x,y) \longrightarrow (-x,-y)$$



- **SUCCESSIONI**: funzioni $f: X \longrightarrow Y$ con $X = \mathbb{N}$

$X = \{ n \in \mathbb{N} \mid n \geq n_0 \in \mathbb{N} \}$.

Def: Sia $f: X \longrightarrow Y$ una funzione.

1) Si dice che f è INIETTIVA / INGETTIVA se:

$\forall x_1, x_2 \in X : \quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

$(\forall x_1, x_2 \in X : \quad x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2))$

2) Si dice che f è SURIETTIVA / SURGETTIVA se $f(X) = Y$, cioè $\forall y \in Y \ \exists x \in X$ t.c. $f(x) = y$.

3) Si dice che f è **BIETTIVA / BIGETTIVA** se è sia iniettiva che suriettiva
$(\forall y \in Y \quad \exists! \, x \in X \;\text{t.c.}\; f(x) = y)$.

ESEMPI

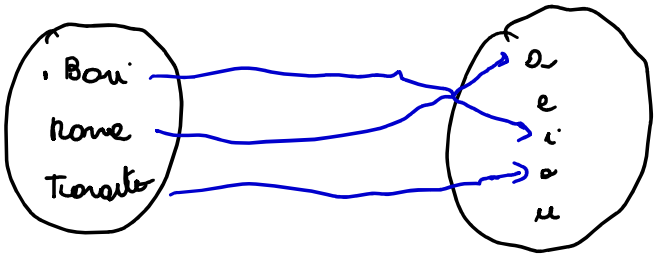
1) $f: X \longrightarrow Y$
$x \longrightarrow$ vocale finale di x $\qquad Y = \{a, e, i, o, u\}$.

$X = \{\text{Bari}, \text{Brindisi}, \text{Taranto}, \text{Roma}, \text{Milano}\}$.

f non è iniettiva. $(f(\text{Bari}) = f(\text{Brindisi}) = i)$
f non è suriettiva $(f(X) = \{a, i, o\} \subsetneq Y)$

2) $f: X \longrightarrow Y$
$x \longmapsto$ vocale finale

$X = \{\text{Bari}, \text{Roma}, \text{Taranto}\}$
$Y = \{a, e, i, o, u\}$



f è iniettiva non è suriettiva.
Se però sostituiamo Y con $\tilde{Y} = \{a, i, o\}$.
allora $f: X \longrightarrow \tilde{Y}$ è biiettiva.

3) $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto x + 1$.

. è iniettiva:

$\forall\, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $f(x_1) = f(x_2)$

$x_1 + 1 = x_2 + 1$

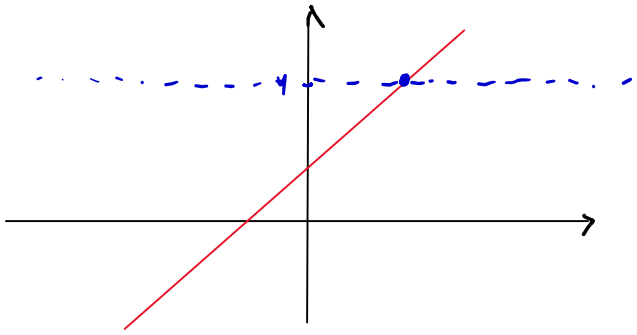
$x_1 = x_2$

. è suriettiva

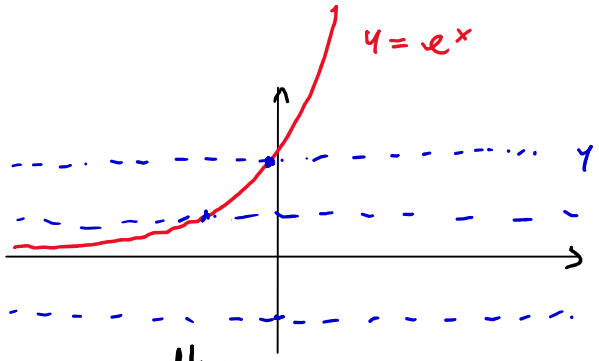
$\forall\, y \in \mathbb{R}$: $\exists\, x \in X$ t.c. $f(x) = y$.

$f(x) = y \iff x + 1 = y \iff x = y - 1$

se $x = y - 1$ $\quad f(x) = f(y-1) = y - 1 + 1 = y$.



4) $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longrightarrow e^x$



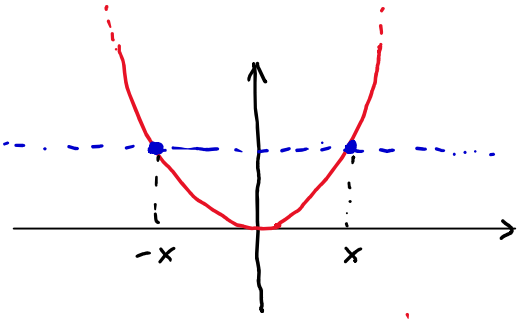
f è iniettiva ma non suriettiva

$\exists\, x \in \mathbb{R}$ t.c. $e^x = -1$

$f(\mathbb{R}) =]0, +\infty[\neq \mathbb{R}$.

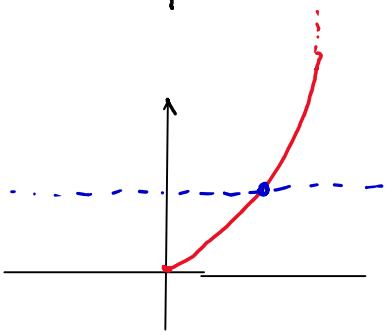
5) $f: \mathbb{R} \longrightarrow]0, +\infty[$, $x \longrightarrow e^x$ è una funzione biiettiva.

6) $f: \mathbb{R} \longrightarrow [0, +\infty[$
$x \longmapsto x^2$



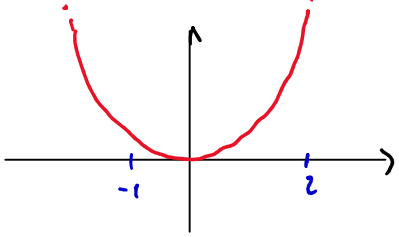
f non è iniettiva perché $f(-2) = 4 = f(2)$.

7) $f: [0, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[$
$x \longmapsto x^2$

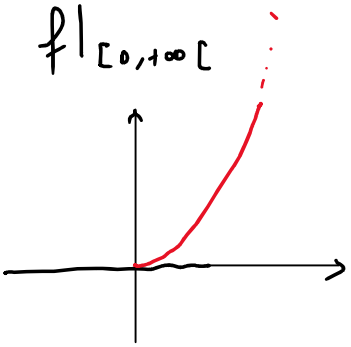


Notazione: Sia $f: X \longrightarrow Y$ una funzione e sia $A \subseteq X$. Definiamo RESTRIZIONE di f ad A la funzione $f|_A : A \longrightarrow Y$, $x \longmapsto f(x)$

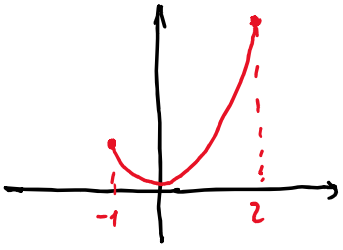
$f: \mathbb{R} \longrightarrow [0,+\infty[$
$x \longrightarrow x^2$



$f|_{[0,+\infty[}$



$f|_{[-1,2]}$



Composizione di funzioni

$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} W$
$x \longmapsto y \longmapsto g(y) = g(f(x))$

Def: Siano $f: X \longrightarrow Y$ e $g: Z \longrightarrow W$ due funzioni. Se $f(X) \subseteq Z$, allora possiamo definire COMPOSIZIONE di f e g come la funzione

$$g \circ f : X \longrightarrow W, \quad x \longmapsto g(f(x))$$

$f(x)$: funzione interna nella composizione

g: funzione esterna.

ESEMPI

1) $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x+1$, $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^2$

$f(\mathbb{R}) = \mathbb{R} = Z = \mathbb{R}$.

$g \circ f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto g(x+1) = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$.

2) $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^2$ $\qquad g: \mathbb{R} \longrightarrow]0, +\infty[$, $x \longmapsto e^x$

$g \circ f: \mathbb{R} \longrightarrow]0, +\infty[$, $x \longmapsto e^{x^2}$

3) $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x-1$ $\qquad g: [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \sqrt{x}$

$f(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \not\subseteq [0, +\infty[$.

non posso definire $g \circ f$ su $\mathbb{R}$.

($g \circ f(x) = \sqrt{x-1}$ è definita solo per $x \geq 1$).

4) $f: [1,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x-1$ $\qquad$ $g: [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \sqrt{x}$

$f([1,+\infty[) = [0,+\infty[$ quindi si può definire

$g \circ f: [1,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longrightarrow \sqrt{x-1}$.

Attenzione: In generale $g \circ f \neq f \circ g$.

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longrightarrow x-1$ $\qquad$ $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^2$

$g \circ f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longrightarrow g(x-1) = (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$

$f \circ g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longrightarrow f(x^2) = x^2 - 1$

Def: Sia $f: X \longrightarrow Y$ una funzione. Si dice che f è INVERTIBILE se $\exists\, g: Y \longrightarrow X$ tale che

1) $\forall\, x \in X : g(f(x)) = x$
2) $\forall\, y \in Y : f(g(y)) = y$

In tal caso g è detta FUNZIONE INVERSA di f e si indica con f^{-1}

TEOREMA

Sia $f: X \longrightarrow Y$ una funzione. Allora f è invertibile $\iff$ f è biiettiva.

In tal caso la funzione inversa di f è

$$f^{-1}: \begin{array}{ccc} Y & \longrightarrow & X \\ y & \longrightarrow & \text{unico } x \text{ t.c. } f(x)=y. \end{array}$$

(unica soluzione dell'equazione $f(x)=y$)

ESEMPI

1) $$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & x+1. \end{array}$$

abbiamo già visto che f è biiettiva quindi f è invertibile.

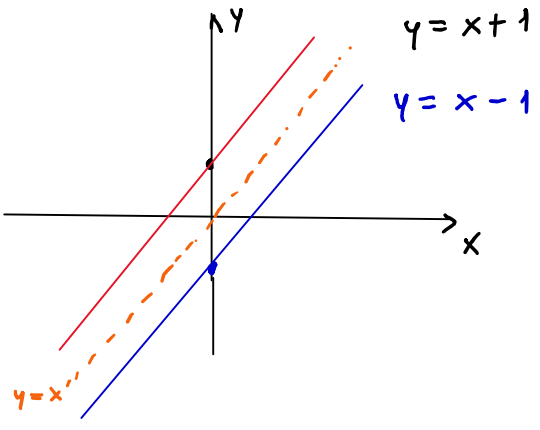
$$f(x)=y \iff x+1=y \iff x=y-1.$$

$$f^{-1}: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & y-1. \end{array}$$

(nella variabile x: $f^{-1}: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x-1 \end{array}$)

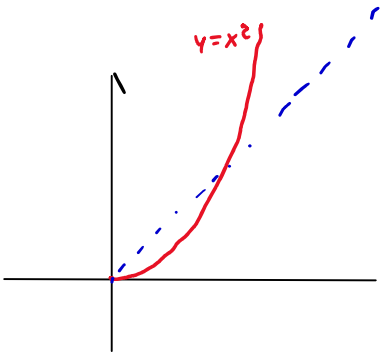
Nota: $$(x,y) \in \mathcal{G}(f) \iff y=f(x)$$
$$\iff x=f^{-1}(y)$$
$$\iff (y,x) \in \mathcal{G}_{f^{-1}}$$

Quindi il grafico di f^{-1} è il simmetrico di $\mathcal{G}_f$ rispetto alla bisettrice del I e III quadrante.



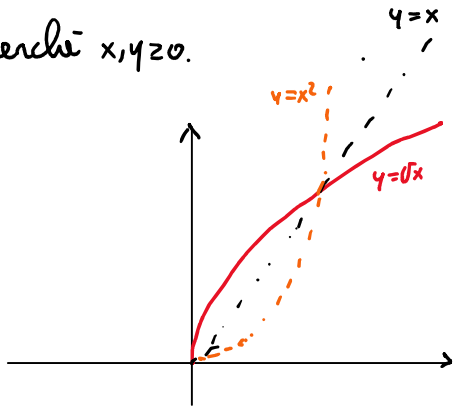
$$f^{-1}: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & x-1 \end{array}$$

2) $f: [0,+\infty[\longrightarrow [0,+\infty[$
$x \longmapsto x^2$



$x^2 = y$ (con $x \in [0,+\infty[$, $y \in [0,+\infty[$)

$x = \pm\sqrt{y} \Rightarrow x = \sqrt{y}$ perché $x, y \geq 0$.



$f^{-1}: [0,+\infty[\longrightarrow [0,+\infty[$
$x \longmapsto \sqrt{x}$

Interpretazione di iniettività e suriettività.

1) Sia $f: X \longrightarrow Y$, allora

- f è iniettiva $\Leftrightarrow$ $\forall y \in Y$ l'equazione $f(x) = y$ ha al massimo una soluzione in X. (una o nessuna soluzione)

Se inoltre $X, Y \subseteq \mathbb{R}$: $\Leftrightarrow$ $\forall y \in Y$ la retta orizzontale ad altezza y interseca il grafico di f al massimo in un punto.

- f è suriettiva $\Leftrightarrow$ $\forall y \in Y$ $\exists$ almeno una soluzione in X di $f(x) = y$.

Se inoltre $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ $\forall y \in Y$ la retta oriz. ad altezza y interseca il grafico di f.

(in almeno un punto).

- f è biiettiva $\iff$ $\forall y \in Y$ l'equazione $f(x) = y$ ha esattamente una soluzione in X ($x = f^{-1}(y)$).

Se inoltre $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ $\iff$ $\forall y \in Y$ la retta orizzontale ad altezza y interseca $\mathcal{G}_f$ esattamente in un punto.