MATEMATICA - LEZIONE 14

venerdì 23 ottobre 2026 11:04

Numeri complessi

$$\mathbb{C} = \{ x + iy \mid x, y \in \mathbb{R},\ i^2 = -1 \}$$

OPERAZIONI IN $\mathbb{C}$

Siano $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2 \in \mathbb{C}$.

- $z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2)$
- $z_1 - z_2 = x_1 - x_2 + i(y_1 - y_2)$
- $z_1 \cdot z_2 = x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$
- $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{|z_2|^2}$ (se $z_2 \neq 0$)

Definizioni da ricordare

$|z| = \sqrt{Re(z)^2 + Im(z)^2}$ MODULO

$\overline{z} = Re(z) - i\, Im(z)$ CONIUGATO.

Rappresentazioni dei numeri complessi

1) FORMA ALGEBRICA / CARTESIANA:

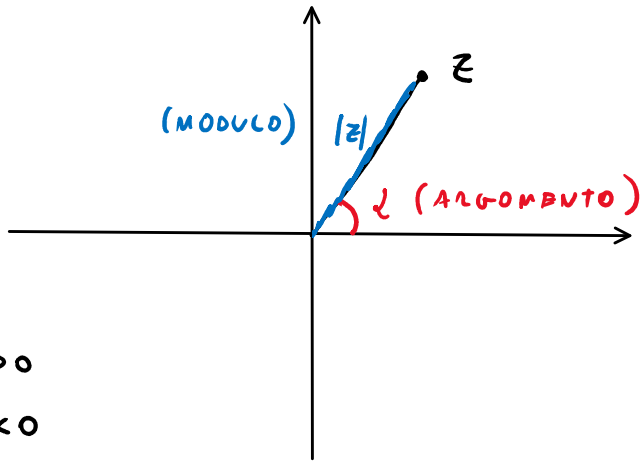
$z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$

x: PARTE REALE $Re(z)$ — y: PARTE IMMAGINARIA $Im(z)$

2) FORMA TRIGONOMETRICA (se $z \neq 0$)

$$z = |z|(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$$

dove ϑ = ARGOMENTO DI z



$$|z| = \sqrt{Re(z)^2 + Im(z)^2}$$

$$\vartheta = \arg(z) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{se } x>0 \\ \pi + \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{se } x<0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{se } x=0,\ y>0 \\ \frac{3}{2}\pi & \text{se } x=0,\ y<0. \end{cases}$$

OSS Siano $z_1 = |z|(\cos\vartheta_1 + i\sin\vartheta_2)$, $z_2 = |z|(\cos\vartheta_2 + i\sin\vartheta_2) \in \mathbb{C}$

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1|(\cos\vartheta_1 + i\sin\vartheta_1)\cdot|z_2|(\cos\vartheta_2 + i\sin\vartheta_2)$$
$$= |z_1||z_2|(\cos(\vartheta_1+\vartheta_2) + i\sin(\vartheta_1+\vartheta_2))$$

Quindi:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1||z_2|$$
$$\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$$

PROPRIETÀ:

- $\forall z \in \mathbb{C}$: $|z| \in \mathbb{R}$, $|z| \geq 0$ e $|z| = 0 \iff z = 0$.
- $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$: $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

$$|z_1 \cdot z_1| = |z_1||z_2|.$$

e $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ se $z_2 \neq 0$.

- $\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$ $(+2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z})$
- $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$ $(+2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z})$

- $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$
- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ e $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$
- $Re(z_1 \pm z_2) = Re(z_1) \pm Re(z_2)$
  $Im(z_1 \pm z_2) = Im(z_1) \pm Im(z_2)$
- $Re(z_1 \cdot z_2) = Re(z_1)Re(z_2) - Im(z_1)Im(z_2)$
  $Im(z_1 \cdot z_2) = Re(z_1)Im(z_2) + Im(z_1)Re(z_2)$

Potenze di numeri complessi

Se $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$

$z^2 = z \cdot z = |z|^2(\cos(2\theta) + i\sin(2\theta))$

$z^3 = z^2 \cdot z = |z|^3(\cos(3\theta) + i\sin(3\theta))$

$z^4 = |z|^4(\cos(4\theta) + i\sin(4\theta))$

FORMULA DI DE MOIVRE

$\forall z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ e $\forall n \in \mathbb{Z}$:

$z^n = |z|^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$

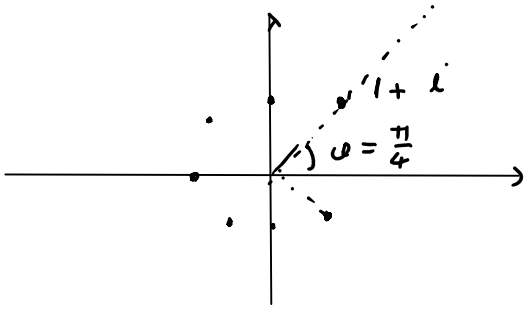
(cioè $|z^n| = |z|^n$ e $\arg(z^n) = n\arg(z) + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$)

ESEMPIO

$(1+i)^7$

$|1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

$\arg(1+i) = \frac{\pi}{4}$



quindi $1+i = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

e $(1+i)^7 = \left(\sqrt{2}\right)^7\left(\cos\left(\frac{7}{4}\pi\right) + i\sin\left(\frac{7}{4}\pi\right)\right)$

$$= \underbrace{(\sqrt{2})^6 \cdot \sqrt{2}}_{8\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$= 8\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$= 8 - 8i$$

Notazione esponenziale.

Def: Sia $z \in \mathbb{C}$, con $z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$.

Definiamo $e^z := e^x (\cos y + i \sin y)$.

oss Se $x = 0$, $e^{iy} = \cos y + i \sin y \quad \forall y \in \mathbb{R}$.

In particolare $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. è possibile scrivere:

$z = |z| (\cos \varphi + i \sin \varphi)$ dove $\varphi = \arg z$.

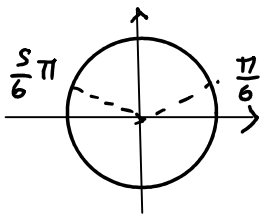
$= \underbrace{|z| e^{i\varphi}}$.

RAPPRESENTAZIONE / FORMA ESPONENZIALE DI z.

ESEMPI

1) $z = 1 + i$

$|z| = \sqrt{2}$, $\arg(z) = \frac{\pi}{4} \Rightarrow z = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$



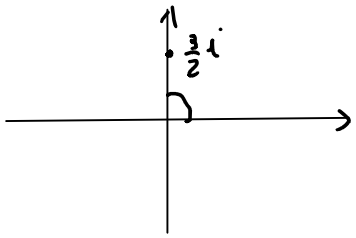
2) $z = -\sqrt{3} + i$

$|z| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$

$\cos \varphi = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ e $\sin \varphi = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{5}{6}\pi$

$-\sqrt{3} + i = 2 e^{i\frac{5}{6}\pi}$

3) $z = \frac{3}{2} i$

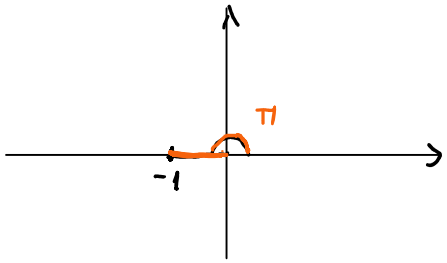


$|z| = \left|\frac{3}{2} i\right| = \frac{3}{2}$

$\arg(z) = \frac{\pi}{2}$

$z = \frac{3}{2} e^{i\frac{\pi}{2}}$

4) $z = -1$



$|-1| = 1$

$-1 = 1 \cdot e^{i\pi} = e^{i\pi}$

FORMULA DI EULERO

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Proprietà delle potenze (intere) in forma esponenziale:

- $\forall\, z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, $z = |z| e^{i\theta}$ con $\theta \in \mathbb{R}$ e $\forall n \in \mathbb{Z}$.

  $z^n = |z|^n e^{in\theta}$

- Se $z_1 = |z_1| e^{i\theta_1}$ e $z_2 = |z_2| e^{i\theta_2}$ allora:

  $z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2| e^{i(\theta_1+\theta_2)}$.

  $\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} e^{i(\theta_1-\theta_2)}$

OSS Se $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$. La forma esponenziale di z è unica (a meno di aggiunta di multipli di 2π nell'argomento). Cioè:

$z = \rho e^{i\theta}$ con $\rho, \theta \in \mathbb{R}$, $\rho \geq 0 \Rightarrow \rho = |z|$ e

$\theta = \arg(z) + 2k\pi$

con $k \in \mathbb{Z}$.

ESEMPIO

Calcoliamo $\dfrac{(1+i)^6}{(1-i)^{10}}$

$1 + i = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$ e $1 - i = \sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}$

$$\frac{(1+i)^6}{(1-i)^{10}} = \frac{\left(\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^6}{\left(\sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^{10}} = \frac{(\sqrt{2})^6\, e^{i\frac{3}{2}\pi}}{(\sqrt{2})^{10}\, e^{-i\frac{5}{2}\pi}}$$

$$= \frac{1}{(\sqrt{2})^4} \frac{e^{i\frac{3}{2}\pi}}{e^{-i\frac{5}{2}\pi}} = \frac{1}{4}\, e^{i\left(\frac{3}{2}+\frac{5}{2}\right)\pi}$$

$$= \frac{1}{4}\, e^{i4\pi} = \frac{1}{4}\left(\underbrace{\cos(4\pi)}_{1} + i\underbrace{\sin(4\pi)}_{0}\right)$$

$$= \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1}{4}.$$

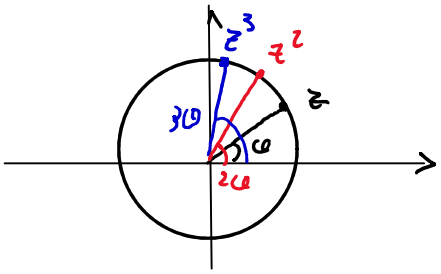
OSS

- $e^0 = 1$
- $e^{z + 2k\pi i} = e^z \quad \forall\, k \in \mathbb{Z}$
- $e^{2k\pi i} = 1 \quad \forall\, k \in \mathbb{Z}$.
- $e^{k\pi i} = (-1)^k \quad \forall\, k \in \mathbb{Z}$.

Interpretazione grafica delle potenze

Se $z \in \mathbb{C}$ e $|z| = 1$. Allora
$\forall n \in \mathbb{Z}$: $|z^n| = 1^n = 1$

$$\arg(z^n) = n \arg(z)$$



- $z = i$

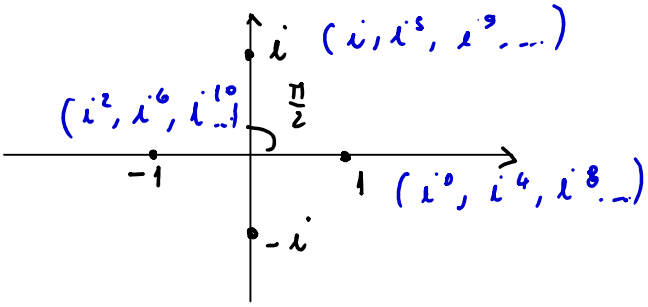
$z^2 = i^2 = -1$

$z^3 = z^2 \cdot z = -1 \cdot i = -i$

$z^4 = -i \cdot i = -i^2 = 1$

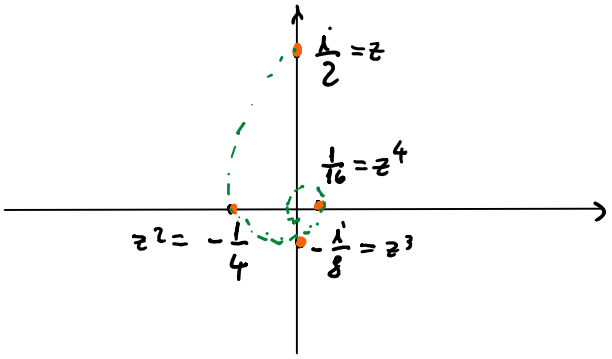
$z^5 = i$

$z^6 = i^2$



- Se $|z| \neq 1$, cambia anche la distanza da 0.

$z = \frac{i}{2}$



Radici n-esime di numeri complessi.

Def: Sia $z \in \mathbb{C}$ e sia $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Una RADICE n-ESIMA di z è un numero complesso $w \in \mathbb{C}$ t.c. $w^n = z$.

Come si trovano le radici n-esime?

- Se $z = 0$.

  $w^n = z$ significa $w^n = 0 \iff w = 0$.

  L'unica radice n-sima di 0 è 0.

- Se $z \neq 0$.

  Rappresentiamo z in forma esponenziale.

  $z = |z| e^{i\theta}$ con $\theta \in \mathbb{R}$.

  Cerchiamo i $w \in \mathbb{C}$ t.c. $w^n = z = |z| e^{i\theta}$.

  Rappresentiamo anche w in forma esponenziale

  $w = |w| e^{i\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

  $$w^n = z \iff |w|^n e^{in\alpha} = |z| e^{i\theta}$$

  $$\iff \begin{cases} |w|^n = |z| \\ n\alpha = \theta + 2k\pi \quad \text{con } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

  $$\iff \begin{cases} |w| = \sqrt[n]{|z|} \quad \text{(radice n-sima reale di } |z|) \\ \alpha = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} \quad \text{con } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

  $$w = \sqrt[n]{|z|}\, e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}$$

  questi numeri si ripetono ogni n valori di k. Quindi ci basta prendere $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$

In conclusione:

$$w^n = z \iff \begin{cases} |w| = \sqrt[n]{|z|} \\ \alpha = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} \quad \text{con } k = 0, 1, 2, \ldots, n-1. \end{cases}$$

Formula per le radici n-esime

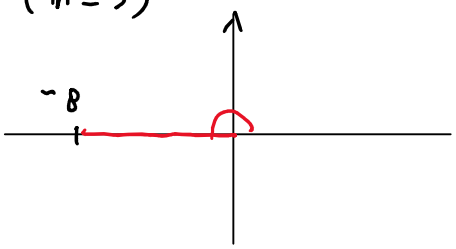
Sia $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, $z = |z| e^{i\theta}$ con $\theta \in \mathbb{R}$, allora le radici n-esime complesse di z sono

$$\sqrt[n]{|z|}\, e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)} \quad \text{con } k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

In particolare ci sono n radici n-esime complesse distinte di z.

ESEMPIO

$z = -8$ Cerchiamo le radici cubiche complesse di -8. $(n=3)$



$|-8| = 8$

$\arg(-8) = \pi$

$-8 = 8 e^{i\pi}$.

Le radici cubiche di -8 sono

$$\sqrt[3]{8}\, e^{i\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right)} \quad \text{con } k = 0, 1, 2.$$

$\sqrt[3]{8} = 2$

Cioè:

$k=0$: $2 e^{i\frac{\pi}{3}} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$= 1 + i\sqrt{3}$

$k=1$: $2 e^{i\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right)} = 2 e^{i\pi} = 2(\cos\pi + i\sin\pi)$

$= -2$

$k=2$: $2 e^{i\left(\frac{\pi}{3} + \frac{4\pi}{3}\right)} = 2 e^{i\left(\frac{5}{3}\pi\right)}$

$= 2\left(\cos\left(\frac{5}{3}\pi\right) + i\sin\left(\frac{5}{3}\pi\right)\right)$

$= 2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$= 1 - i\sqrt{3}$.

le radici cubiche di -8 sono $1+i\sqrt{3}$, -2, $1-i\sqrt{3}$.

ESEMPIO

$z = -\sqrt{3} + i$

Scriviamo in forma esponenziale le radici quinte di z.

$|z| = 2$, $\arg(z) = \frac{5}{6}\pi$

$\frac{5\pi + 12k\pi}{30}$

le radici quinte sono: $\sqrt[5]{2}\, e^{i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{5}\right)}$

con $k = 0, 1, 2, 3, 4$

- $\sqrt[5]{2}\, e^{i\frac{\pi}{6}}$
- $\sqrt[5]{2}\, e^{i\frac{11}{30}\pi}$
- $\sqrt[5]{2}\, e^{i\frac{29}{30}\pi}$
- $\sqrt[5]{2}\, e^{i\frac{41}{30}\pi}$
- $\sqrt[5]{2}\, e^{i\frac{53}{30}\pi}$

Radici quadrate ($n = 2$).

Se $z = |z|\, e^{i\varphi}$ con $\varphi \in \mathbb{R}$.

le radici quadrate sono:

$\sqrt{|z|}\, e^{i\left(\frac{\varphi}{2} + k\pi\right)}$ con $k = 0, 1$

$\sqrt{|z|}\, e^{i\frac{\varphi}{2} + ik\pi}$

$\sqrt{|z|}\, e^{i\frac{\varphi}{2}}\, e^{ik\pi}$

$e^0 = 1$ se $k = 0$

$e^{i\pi} = -1$ se $k = 1$.

$\pm\sqrt{|z|}\, e^{i\frac{\varphi}{2}}$

ESEMPIO

Le radici quadrate di $1+i = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$ sono

$$\pm \sqrt{\sqrt{2}}\, e^{i\frac{\pi}{8}} = \pm \sqrt[4]{2}\, e^{i\frac{\pi}{8}}.$$

Problema: ci sono alcuni casi in cui l'argomento non è un angolo noto:

ESEMPIO

$z = 3 + 4i$

$|z| = \sqrt{9+16} = 5$

$\arg(z) = ?$ $\quad \cos\theta = \frac{3}{5}$ e $\sin\theta = \frac{4}{5}$

non è uno degli "angoli noti".

$\theta = \arctan\left(\frac{4}{3}\right)$

$z = 5\, e^{i \arctan\left(\frac{4}{3}\right)}$

e le radici quadrate di z sono:

$$\pm \sqrt{5}\, e^{i\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{4}{3}\right)}.$$

Nota: In alcuni casi le radici quadrate hanno un'espressione più semplice se calcolate tramite le formule di bisezione

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

Se $z = |z| e^{i\theta}$ con $\theta \in [0, \pi]$ allora le radici quadrate sono:

$$\pm \sqrt{|z|}\, e^{i\frac{\theta}{2}} \quad \text{ma}$$

$$\sqrt{|z|}\, e^{i\frac{\theta}{2}} = \sqrt{|z|}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\theta}{2}\right)$$

$$= \sqrt{|z|}\left(\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} + i\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}\right).$$

$$= \sqrt{\frac{|z| + |z|\cos\theta}{2}} + i\sqrt{\frac{|z| - |z|\cos\theta}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{|z| + \mathrm{Re}(z)}{2}} + i\sqrt{\frac{|z| - \mathrm{Re}(z)}{2}}$$

Se $\theta \in [\pi, 2\pi]$ le formule di bisezione vanno usate con segni diversi.

Formula alternativa per le radici quadrate

Se $z = x + iy$, con $x, y \in \mathbb{R}$.

- Se $y \geq 0$, le radici quadrate di z sono:

$$\pm\left(\sqrt{\frac{|z|+x}{2}} + i\sqrt{\frac{|z|-x}{2}}\right)$$

- Se $y < 0$, le radici quadrate sono:

$$\pm\left(-\sqrt{\frac{|z|+x}{2}} + i\sqrt{\frac{|z|-x}{2}}\right).$$

ESEMPIO

$z = 3 + 4i$ $\qquad |z| = 5$

le radici quadrate sono:

$$\pm\left(\sqrt{\frac{5+3}{2}} + i\sqrt{\frac{5-3}{2}}\right) = \pm(2+i) = \begin{cases} 2+i \\ -2-i \end{cases}.$$

CURIOSITÀ Il risultato deve essere lo stesso di prima quindi:

$$\cos\left(\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{4}{3}\right)\right) = \frac{2}{\sqrt{5}} \quad \text{e}$$

$$\sin\left(\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{4}{3}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

OSS Se $y = 0$ allora

le radici quadrate sono: $\pm\left(\sqrt{\frac{|x|+x}{2}} + i\sqrt{\frac{|x|-x}{2}}\right)$

quindi:

- se $x \geq 0$: $\pm\sqrt{x}$
- se $x < 0$: $\pm\left(\sqrt{\frac{-x+x}{2}} + i\sqrt{\frac{-x-x}{2}}\right) = \pm i\sqrt{-x}$
$= \pm i\sqrt{|x|}$.

radici quadrate di -4 sono $\pm i\sqrt{4} = \pm 2i$

radici quadrate di 16 sono ± 4

Equazioni di II grado in $\mathbb{C}$.

Siano $a, b, c \in \mathbb{C}$ con $a \neq 0$. Sia $\Delta = b^2 - 4ac$.

L'equazione $az^2 + bz + c = 0$ ha come soluzioni $\frac{-b \pm r}{2a}$ dove r è una radice quadrata di Δ.

($\Delta = 0$: una soluzione
$\Delta \neq 0$: sempre due soluzioni complesse)

ESEMPIO

$z^2 + iz + 2 - 3i = 0$ $\quad (a=1,\ b=i,\ c=2-3i)$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$= -1 - 4(2-3i) = -1 - 8 + 12i = -9 + 12i$$

$$|\Delta| = \sqrt{81+144} = \sqrt{225} = 15 \quad , \quad \mathrm{Re}(\Delta) = -9$$

una radice di Δ è

$$r = \sqrt{\frac{15-9}{2}} + i\sqrt{\frac{15+9}{2}} = \sqrt{3} + i\sqrt{12}$$
$$= \sqrt{3} + i\,2\sqrt{3}$$

le soluzioni sono

$$z = \frac{-i \pm (\sqrt{3} + i\sqrt{12})}{2} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} + i\left(\frac{\pm\sqrt{12} - 1}{2}\right)$$

- Se $\Delta \in \mathbb{R}$, il conto è facile:

$$z^2 + z + 2 = 0$$
$$\Delta = 1 - 8 = -7$$

le radici di -7 sono $\pm i\sqrt{7}$

quindi le soluzioni sono

$$\frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{7}}{2}$$

oss Se $a, b, c \in \mathbb{R}$, l'equazione $az^2 + bz + c = 0$ ha:

- $\Delta > 0$, due soluzioni reali.
- $\Delta = 0$, una soluzione reale
- se $\Delta < 0$, due soluzioni complesse coniugate.

$$\frac{-b \pm i\sqrt{|\Delta|}}{2a} = \frac{-b}{2a} \pm \frac{i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$$

ESEMPIO DI ESERCIZIO DI ESAME:

Sia $z = \frac{6+7i}{1+2i}$

1) Determinare la forma algebrica di z.
2) Determinare la forma esponenziale e algebrica di $(z-3)^9$