MATEMATICA - LEZIONE 12

mercoledì 21 ottobre 2026 09:10

Numeri complessi

Si introduce un numero i (UNITÀ IMMAGINARIA) tale che $i^2 = -1$.

Def: Un NUMERO COMPLESSO è un oggetto del tipo $x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$. L'insieme dei numeri complessi si indica con

$$\mathbb{C} = \{ x + iy \mid x, y \in \mathbb{R} \}.$$

Sia $z \in \mathbb{C}$. La rappresentazione $z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$ si dice FORMA ALGEBRICA / CARTESIANA di z.

- x viene detta PARTE REALE di z ($\mathrm{Re}(z)$)
- y viene detta PARTE IMMAGINARIA di z ($\mathrm{Im}(z)$)

ESEMPI

- $z = 2 + 3i$ $\quad \mathrm{Re}(z) = 2, \ \mathrm{Im}(z) = 3$
- $z = 4 - 2i$ $\quad \mathrm{Re}(z) = 4, \ \mathrm{Im}(z) = -2$
- $z = \pi + \sqrt{3}\, i$ $\quad \mathrm{Re}(z) = \pi, \ \mathrm{Im}(z) = \sqrt{3}$
- $z = 0 + 4i = 4i$ $\quad \mathrm{Re}(z) = 0, \ \mathrm{Im}(z) = 4$
- $z = 3 = 3 + 0i$ $\quad \mathrm{Re}(z) = 3, \ \mathrm{Im}(z) = 0.$

oss:

- $\forall x \in \mathbb{R}$: $x = x + 0 \cdot i \in \mathbb{C}$. Quindi $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$.
- Se $z \in \mathbb{C}$, allora: $z \in \mathbb{R} \iff Im(z) = 0$.

oss 2

La rappresentazione algebrica di un numero complesso è unica: Se $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$

$$x_1 + i y_1 = x_2 + i y_2 \iff x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2$$

DIM

$$x_1 + i y_1 = x_2 + i y_2$$

$$x_1 - x_2 = i y_2 - i y_1$$

$$x_1 - x_2 = i (y_2 - y_1)$$

Se $y_1 = y_2$ allora anche $x_1 = x_2$.

Se si avesse $y_1 \neq y_2$, allora

$$i = \frac{x_1 - x_2}{y_2 - y_1} \in \mathbb{R}$$ assurdo perché $i \notin \mathbb{R}$.

oss 3 Siano $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, allora:

$$z_1 = z_2 \iff \begin{cases} Re(z_1) = Re(z_2) \\ Im(z_1) = Im(z_2) \end{cases}$$

Ogni uguaglianza in $\mathbb{C}$ si riscrive come un sistema di due equazioni in $\mathbb{R}$.

I numeri complessi si possono sommare, sottrarre e moltiplicare tra loro secondo le stesse regole che usiamo in $\mathbb{R}$.

ESEMPI

$$3 + 2i \quad + \quad 4 - 7i \quad = \quad 7 - 5i$$

$$(3+2i)\cdot(4-7i) = 12 - 21i + 8i - 14\,i^2 \qquad (i^2 = -1)$$

$$= 12 - 21i + 8i + 14$$

$$= 26 - 13i$$

$$3 + 2i - (4 - 7i) = 3 + 2i - 4 + 7i$$

$$= -1 + 9i$$

Def: Siano $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $z_1 = x_1 + i y_1$ e $z_2 = x_2 + i y_2$ con $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$. Definiamo

$$z_1 + z_2 := x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2) \quad \text{(ADDIZIONE IN } \mathbb{C}\text{)}$$

$$z_1 - z_2 := x_1 - x_2 + i(y_1 - y_2) \quad \text{(SOTTRAZIONE IN } \mathbb{C}\text{)}$$

$$z_1 \cdot z_2 = x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1). \quad \text{(PRODOTTO IN } \mathbb{C}\text{)}$$

le operazioni in $\mathbb{C}$ godono delle stesse proprietà che valgono in $\mathbb{R}$:

- prop. associativa e commutativa.
- vale la legge di annullamento del prodotto:

$$z_1 \cdot z_2 = 0 \iff z_1 = 0 \ \vee \ z_2 = 0.$$

- $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \ \exists \frac{1}{z} \in \mathbb{C}$ t.c. $z \cdot \frac{1}{z} = 1$.

(cioè esiste il reciproco numero complesso non nullo)

Come si trova il reciproco $\frac{1}{z}$?

$z = 2+i$, $\frac{1}{z} = \frac{1}{2+i}$ ma

quanto valgono $Re\left(\frac{1}{z}\right)$ e $Im\left(\frac{1}{z}\right)$?

Def: Sia $z \in \mathbb{C}$, definiamo MODULO di z la quantità $|z| := \sqrt{Re(z)^2 + Im(z)^2}$

(cioè se $z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$: $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$).

$$|2+4i| = \sqrt{2^2+4^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$|3-i| = \sqrt{3^2+(-1)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$$

$$|-3-4i| = \sqrt{(-3)^2+(-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

$$|i| = \sqrt{0^2+1^2} = \sqrt{1} = 1.$$

$$|3| = \sqrt{3^2} = 3$$

$$|-3| = \sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3.$$

OSS

1) $|z| \geq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$.

2) $|z| = 0 \iff z = 0$

3) Se $z = x \in \mathbb{R}$:

$$\underbrace{|z|}_{\text{MODULO}} = \sqrt{x^2+0^2} = \sqrt{x^2} = \underbrace{|x|}_{\text{VALORE ASSOLUTO}}.$$

4) $\forall\, y \in \mathbb{R}$: $\underbrace{|iy|}_{\text{MODULO}} = \underbrace{|y|}_{\text{VALORE ASSOLUTO}}$

$|-2i| = |-2| = 2.$

Def: Sia $z \in \mathbb{C}$. Definiamo CONIUGATO di z il numero complesso $\overline{z} := Re(z) - i\,Im(z)$ (cioè se $z = x + iy$, $\overline{z} = x - iy$)

- $z = 2 + 3i$ $\quad\quad$ $\overline{z} = 2 - 3i$
- $z = \pi - 2i$ $\quad\quad$ $\overline{z} = \pi + 2i$
- $z = 3$ $\quad\quad$ $\overline{z} = 3$
- $z = 4i$ $\quad\quad$ $\overline{z} = -4i$

oss $\forall\, z \in \mathbb{C}$, $z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} z \cdot \overline{z} &= (x+iy)(x-iy) \\ &= x^2 - (iy)^2 \\ &= x^2 - i^2 y^2 \\ &= x^2 + y^2 = |z|^2 \end{aligned}$$

quindi $z \cdot \overline{z} = |z|^2$. In particolare:

$$z \cdot \frac{\overline{z}}{|z|^2} = 1 \quad \text{cioè} \quad \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$$

PROPRIETÀ

Sia $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, allora:

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{x - iy}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}$$

cioè $Re\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{x}{x^2+y^2}$ e $Im\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{y}{x^2+y^2}$.

ESEMPIO:

$$\frac{1}{2+i} = ? \qquad z = 2+i.$$

$$|z|^2 = Re(z)^2 + Im(z)^2 = 2^2 + 1^2 = 4+1 = 5.$$

$$\bar{z} = \overline{2+i} = 2 - i$$

$$\frac{1}{2+i} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{2-i}{5} = \frac{2}{5} - \frac{i}{5}$$

Metodo alternativo:

$\frac{1}{2+i}$

per ottenere la forma algebrica basta moltiplicare num. e den. per il coniugato del den.

$$\frac{1}{2+i} = \frac{1}{2+i} \cdot \frac{2-i}{2-i} = \frac{2-i}{(2+i)(2-i)}$$

$$= \frac{2-i}{4-i^2} = \frac{2-i}{4+1} = \frac{2-i}{5} = \frac{2}{5} - \frac{i}{5}.$$

Sapendo calcolare i reciproci, possiamo calcolare il rapporto tra due numeri complessi.

Def: Sia $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $z_2 \neq 0$, definiamo

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2}.$$

ESERCIZIO

Scrivere in forma algebrica il numero complesso

$$z = \frac{2+i}{4+3i}.$$

$$z = \frac{2+i}{4+3i} \cdot \frac{4-3i}{4-3i} = \frac{(2+i)(4-3i)}{(4+3i)(4-3i)}$$

$$= \frac{8 - 6i + 4i \underbrace{- 3i^2}_{=3}}{16 - \underbrace{(3i)^2}_{9i^2 = -9}} = \frac{8 - 6i + 4i + 3}{16 + 9}$$

$$= \frac{11 - 2i}{25} = \frac{11}{25} - \frac{2}{25} i$$

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{11}{25} \qquad \mathrm{Im}(z) = -\frac{2}{25}$$

ESERCIZIO 2

Determinare la parte reale e la parte immaginaria di $z = \frac{i-1}{2-i}$

$$z = \frac{i-1}{2-i} = \frac{(i-1)(2+i)}{(2-i)(2+i)}$$

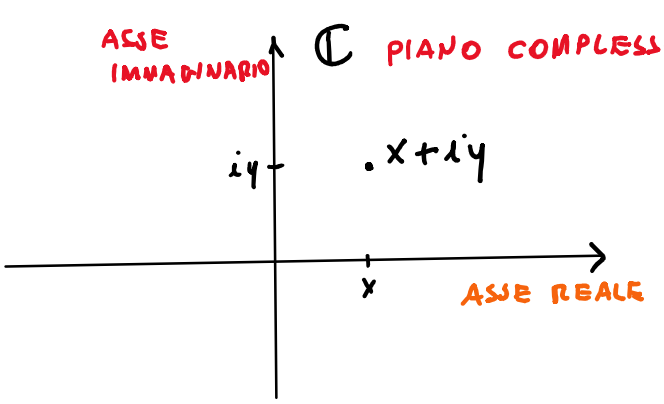
$$= \frac{2i + i^2 - 2 - i}{4 - i^2} = \frac{2i - 1 - 2 - i}{4 + 1}$$

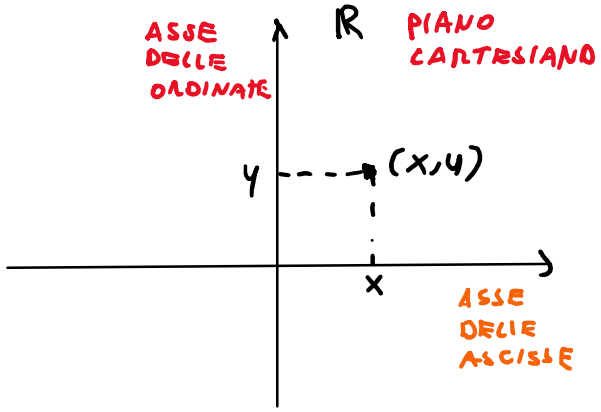
$$= \frac{-3+2i}{5} = -\frac{3}{5} + \frac{2}{5}i$$

$$Re(z) = -\frac{3}{5} \qquad Im(z) = \frac{2}{5}$$

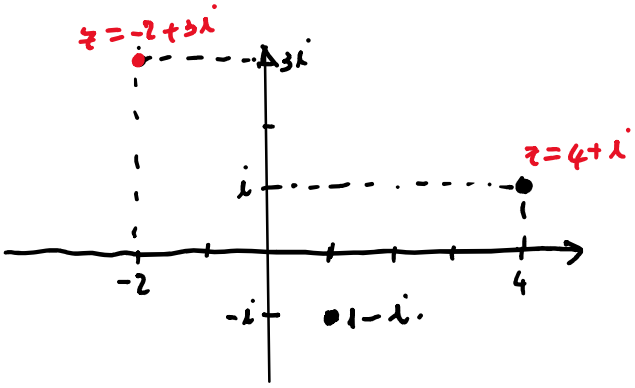
Rappresentazione grafica di $\mathbb{C}$.

Identificando $z = x + iy \in \mathbb{C}$ con $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ possiamo rappresentare $\mathbb{C}$ su un piano.





Def: Un numero complesso si dice IMMAGINARIO PURO se $Re(z) = 0$ ($z = iy$ con $y \in \mathbb{R}$).

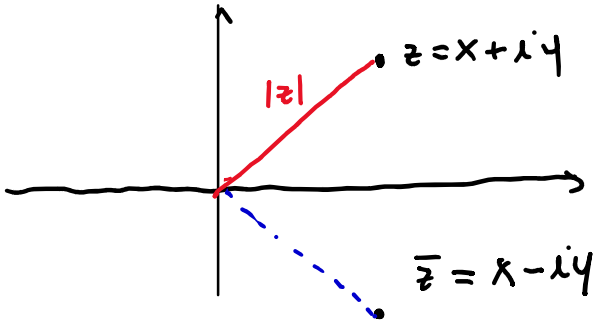


$z = 4 + i$

$z = -2 + 3i$

$z = 1 - i$

Interpretazione grafica di modulo e coniugato

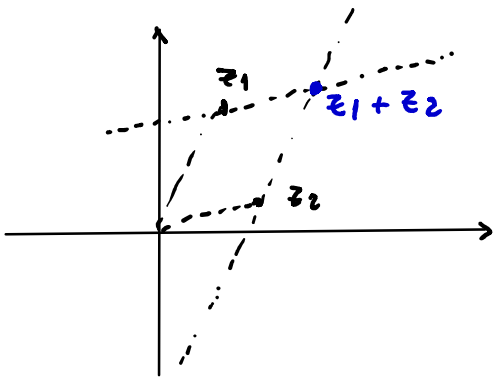


$|z| = \sqrt{x^2+y^2}$ è la distanza da 0 sul piano complesso

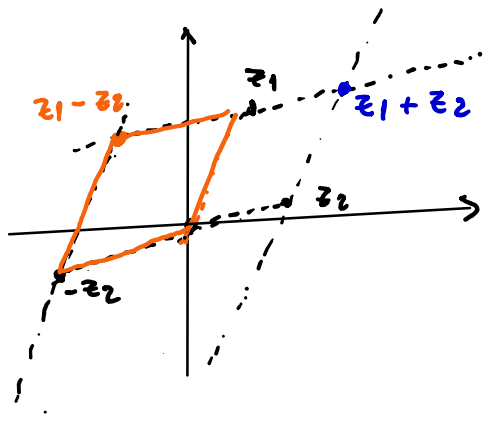
$\bar{z}$ è il simmetrico di z rispetto all'asse x.

$\forall\, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$: $|z_1 - z_2|$ è la distanza tra z_1 e z_2 sul piano complesso.

Interpretazione grafica della somma



$z_1 + z_2$ è il punto in $\mathbb{C}$ individuato dalla regola del parallelogramma.

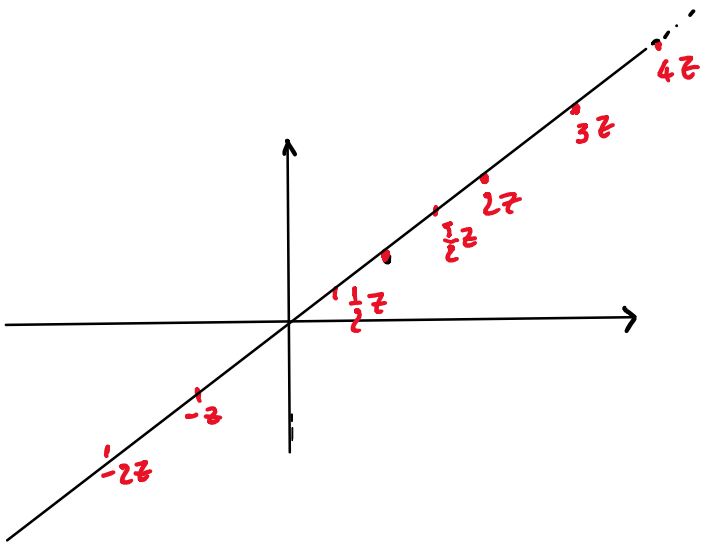


$z_1 - z_2$ è il punto che si ottiene sommando z_1 con $-z_2$.

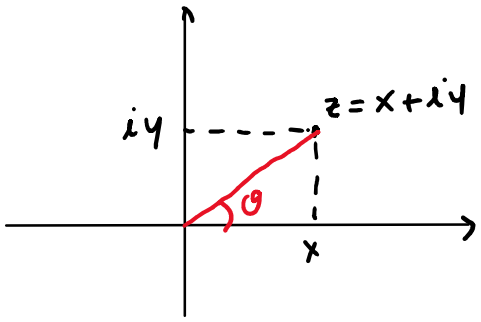
oss

Se $z = x + iy \in \mathbb{C}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$:

$\lambda z = \lambda x + i\lambda y$



Rappresentazione trigonometrica dei numeri complessi.



z può essere identificato da

- $Re(z) = x$ e $Im(z) = y$.
- $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$ e l'angolo θ che il segmento tra 0 e z forma con il semiasse reale positivo.

$Re(z) = |z| \cos\theta$

$Im(z) = |z| \sin\theta$.

Quindi z si può scrivere come:

$$z = Re(z) + i\,Im(z) = |z|\cos\theta + |z|\sin\theta$$

$$= \underbrace{|z|(\cos\theta + i\sin\theta)}_{\text{RAPPRESENTAZIONE TRIGONOMETRICA DI } z}.$$

- Se conosciamo x e y, allora:

1) $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$

2) θ è un qualsiasi angolo tale che:

$$\cos\theta = \frac{Re(z)}{|z|} = \frac{x}{|z|} \quad \text{e} \quad \sin\theta = \frac{Im(z)}{|z|} = \frac{y}{|z|}.$$

cioè:

$$\theta = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{se} \quad x>0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right)+\pi & \text{se} \quad x<0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{se} \quad x=0 \ \text{e} \ y>0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{se} \quad x=0 \ , \ y<0 \end{cases}$$

oss: Se $z \neq 0$, la rappresentazione trigonometrica di z è unica cioè se $\exists\, \rho, r, \theta, \alpha \in \mathbb{R}$ con $\rho, r > 0$ t.c.

$$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

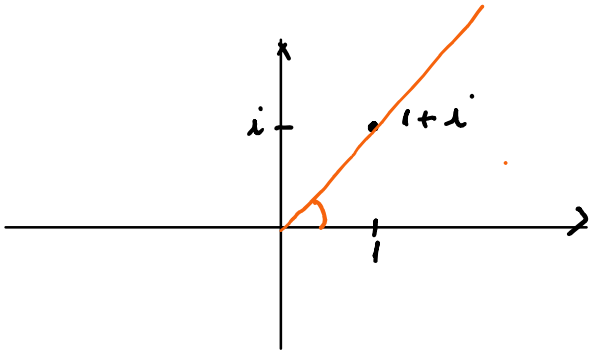
allora: $\rho = r = |z|$

$\theta = \alpha + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.

Def: Un qualsiasi angolo θ t.c. $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ è detto ARGOMENTO DI z ($\arg(z)$). L'argomento è unico a meno di aggiunta di multipli interi di 2π.

ESEMPIO

$z = 1 + i$



$|z| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

cerchiamo θ t.c.

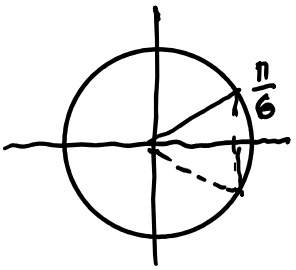
$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ e $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$

$\arg(z) = \frac{\pi}{4}$.

Forma trig. $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$

$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

2) $z = \sqrt{3} - i$



$|z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$

$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\sin\theta = \frac{-1}{2}$ $\theta = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$

$|z| = 2$, $\arg(z) = -\frac{\pi}{6}$ $\left(\text{o } \frac{11}{6}\pi \ldots\right)$

$z = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$

$= 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$

3) $z = 2 + i$

$|z| = \sqrt{5}$

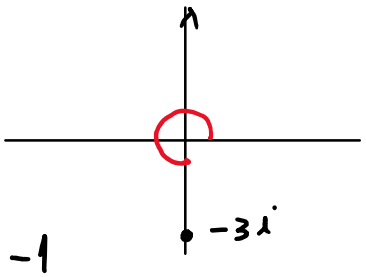
$\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$ $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + 2k\pi$$

$$z = \sqrt{2}\left(\cos(\arctan\tfrac{1}{2}) + i\sin(\arctan\tfrac{1}{2})\right)$$

4) $z = -3i$

$|z| = |-3| = 3$



$\cos\varphi = \frac{0}{3} = 0$, $\sin\varphi = \frac{-3}{3} = -1$

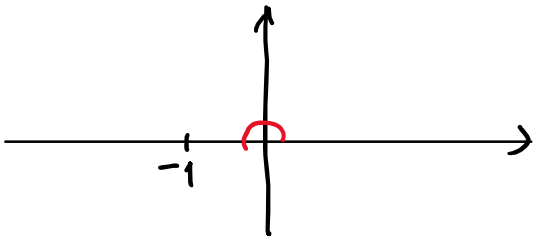
$\varphi = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$ $\quad$ (o $\varphi = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ...)

5) $z = -1$

$|z| = 1$

$\arg z = \pi$

$-1 = 1 \cdot (\cos\pi + i\sin\pi)$.



Siano $z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$

$z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$

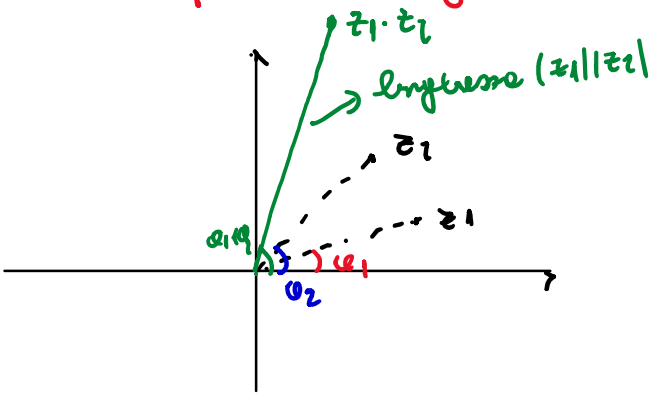
$$z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2|\Big(\underbrace{\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2}_{\cos(\varphi_1+\varphi_2)} + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2)\Big)$$

$$= \underbrace{|z_1||z_2|}_{\in \mathbb{R}_{\geq 0}}\Big(\cos(\underbrace{\varphi_1+\varphi_2}_{\in\mathbb{R}}) + i\sin(\underbrace{\varphi_1+\varphi_2}_{\in\mathbb{R}})\Big)$$

$$\Rightarrow |z_1 \cdot z_2| = |z_1||z_2|$$

$$\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 \quad (+2k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z})$$

Interpretazione geometrica del prodotto in $\mathbb{C}$.



$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1||z_2|$$

$$\arg(z_1 \cdot z_2) = \alpha_1 + \alpha_2$$

Moltiplicare z_1 per z_2 significa $|z_1|$ per $|z_2|$ e ruotare z_1 di un angolo pari a α_2.

Se $|z_2| = 1$. allora $z_1 \cdot z_2$ è il punto che si ottiene ruotando z_1 di un angolo α_2