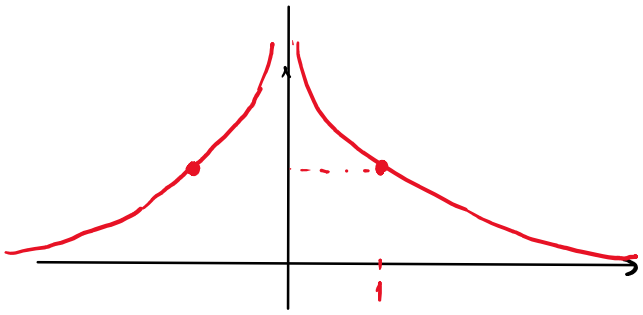
MATEMATICA - LEZIONE 17

venerdì 30 ottobre 2026 11:07

LIMITI DI FUNZIONI

$f(x) = \frac{1}{x^2}$

$Dom(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$



Quando x è molto grande, $f(x)$ è molto piccolo
Quando $|x|$ è molto piccolo, $f(x)$ è molto grande.

Def: Si definisce AMPLIAMENTO DI $\mathbb{R}$ l'insieme

$\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$

Per convenzione assumeremo che:

- $\forall\, x \in \mathbb{R}$: $\quad -\infty < x < +\infty$.
- $\forall\, x \in \mathbb{R}$: $\quad x + \infty = +\infty$
  $x - \infty = -\infty$

  Inoltre $\quad +\infty + \infty = +\infty \quad$ e $\quad -\infty - \infty = -\infty$.

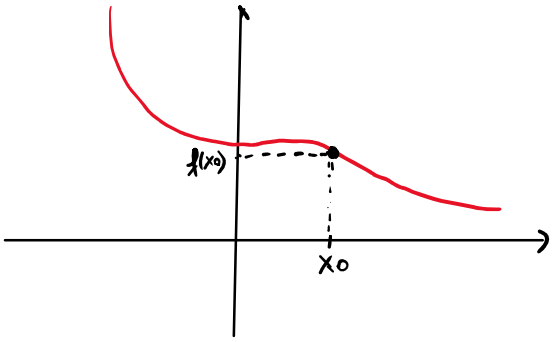
- $\forall\, x \in \mathbb{R}, x \neq 0$: $\quad +\infty \cdot x = \begin{cases} +\infty & \text{se } x > 0 \\ -\infty & \text{se } x < 0 \end{cases} = \frac{+\infty}{x}$

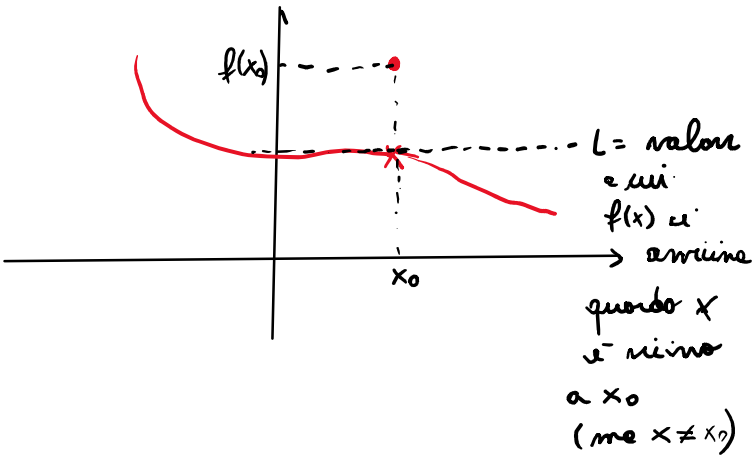
  $-\infty \cdot x = \begin{cases} -\infty & \text{se } x > 0 \\ +\infty & \text{se } x < 0 \end{cases} = \frac{-\infty}{x}$

- $\forall\, x \in \mathbb{R}$: $\quad \frac{x}{+\infty} = 0 = \frac{x}{-\infty}$

Nota: $+\infty - \infty$ e $\pm\infty \cdot 0$ non sono definiti (forme indeterminate)

Definizioni preliminari (intorni e punti di accumulazione)

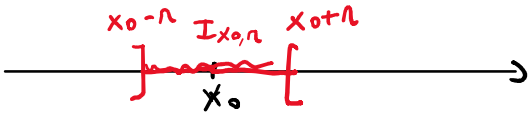




Def: Sia $x_0 \in \mathbb{R}$, definiamo INTORNO SFERICO di x_0 un qualsiasi intervallo del tipo:

$I_{x_0,r} :=]x_0 - r, x_0 + r[$ con $r > 0$.

L'insieme di tutti i possibili intorni di x_0 si indica con $\mathcal{I}_{x_0} := \{ I_{x_0,r} \mid r > 0 \}$.



oss Sia $x_0 \in \mathbb{R}$.

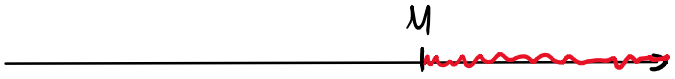
1) Sia $r > 0$:

$x \in I_{x_0,r} \iff x_0 - r < x < x_0 + r \iff -r < x - x_0 < r$

$\iff |x - x_0| < r$

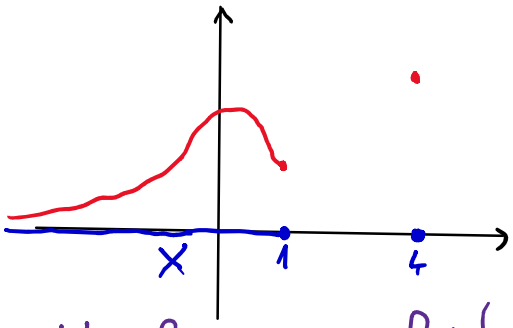
2) $U \in \mathcal{I}_{x_0} \iff \exists\, r > 0$ t.c. $U =]x_0 - r, x_0 + r[$.

Def: Definiamo INTORNI di $+\infty$ tutte le semirette destre aperte del tipo $]M, +\infty[$ con $M \in \mathbb{R}$. L'insieme di queste semirette si indica con $\mathcal{I}_{+\infty}$.



Def: Definiamo INTORNI DI $-\infty$ tutte le semirette sinistre aperte del tipo $]-\infty, -M[$ con $M \in \mathbb{R}$. Denotiamo $\mathcal{I}_{-\infty}$ l'insieme di tali semirette.

Non sempre ha senso chiedersi qual è il comportamento di una funzione vicino ad un punto:

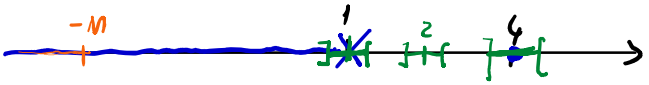


$$f: X \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$X =]-\infty, 1[\cup \{4\}$$

Non ha senso chiedersi qual è il comportamento di f vicino ad $x_0 = 4$ perché vicino a 4 non ci sono altri punti del dominio X.

Def: Sia $X \subseteq \mathbb{R}$. Sia $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$. Si dice che x_0 è un PUNTO DI ACCUMULAZIONE per X se ogni intorno di x_0 contiene infiniti punti di X. L'insieme dei punti di accumulazione si indica con $D_r(X)$.

$X =]-\infty, 1[\cup \{4\}$

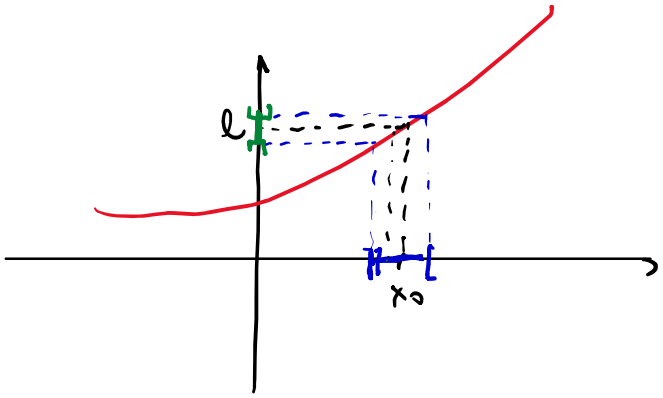


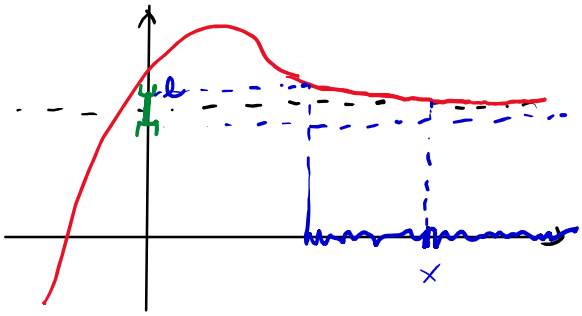
$D_r(X) =]-\infty, 1] \cup \{-\infty\}$

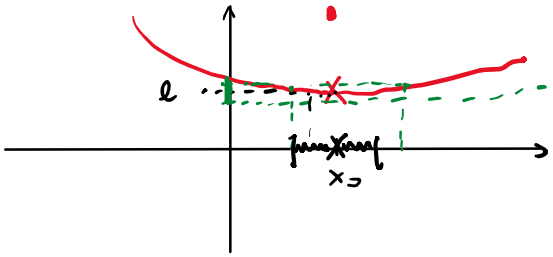
In generale:

- Se $X =]a, b[$ o $[a, b]$ o $]a, b]$ o $[a, b[$. con $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, allora $D_r(X) = [a, b]$
- Se $X =]a, +\infty[$, allora $D_r(X) = [a, +\infty[\cup \{+\infty\}$
  $[a, +\infty[$
- Se $X =]-\infty, b]$ o $]-\infty, b[$, allora $D_r(X) =]-\infty, b] \cup \{-\infty\}$.

Definizione di limite per funzioni

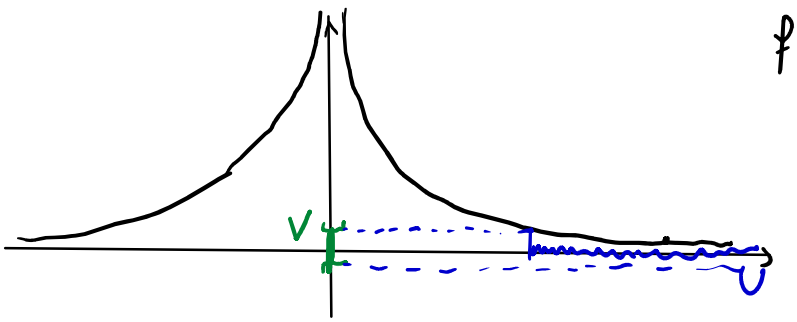






Def: Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ un insieme, sia $f: X \to \mathbb{R}$ una funzione e siano $x_0 \in D_r(X) \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ e $L \in \overline{\mathbb{R}}$. Si dice che L È IL LIMITE DI $f(x)$ PER X CHE TENDE A x_0 (o $f(x)$ TENDE AD L PER x CHE TENDE A x_0) se:

$\forall V \in \mathcal{I}_L \ \exists U \in \mathcal{I}_{x_0}$ t.c. $\forall x \in U \cap X \setminus \{x_0\}$: $f(x) \in V$. In tal caso si scrive $L = \lim_{x \to x_0} f(x)$



$f(x) = \frac{1}{x^2}$

$x_0 = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

Definizioni equivalenti: Siano X, f, x_0, L come nella definizione di limite.

- Se $x_0 \in L \in \mathbb{R}$. Allora

$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta > 0$ t.c.

$\forall x \in X$ con $0 < |x - x_0| < \delta$ risulta:

$|f(x) - L| < \varepsilon$. $\quad (V =]L - \varepsilon, L + \varepsilon[)$

- Se $x_0 \in \mathbb{R}$, $L = +\infty$. Allora:

$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \iff \forall M > 0 \ \exists \ \delta > 0$ t.c.

$\forall x \in X$ con $0 < |x - x_0| < \delta$ risulta

$f(x) > M$.

- Se $x_0 \in \mathbb{R}$, $L = -\infty \iff \forall M > 0 \ \exists \ \delta > 0$ t.c.

$\forall x \in X$ con $0 < |x - x_0| < \delta$ risulta

$f(x) < -M$.

- Se $x_0 = +\infty$, $L \in \mathbb{R}$:

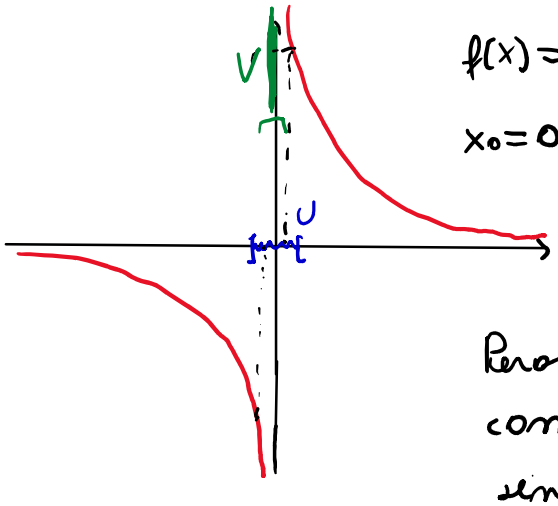
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \ M > 0$ t.c.

$\forall x \in X$ con $x > M$ risulta

$|f(x) - L| < \varepsilon$.

Limite destro e sinistro

Ci sono situazioni in cui il comportamento di una funzione è diverso a destra e a sinistra di un punto



$f(x) = \frac{1}{x}$

$x_0 = 0$

in questo caso si scrive che $\nexists \lim_{x \to x_0} f(x)$

Però è possibile distinguere il comportamento a destra e a sinistra di x_0

Def: Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$. Si dice che x_0 è un PUNTO DI ACCUMULAZIONE DA DESTRA ($x_0 \in D_i^+(X)$) se ogni intorno di x_0 contiene infiniti punti di X maggiori di x_0

Def: Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$. Si dice che x_0 è un PUNTO DI ACCUMULAZIONE DA SINISTRA ($x_0 \in D_i^-(X)$) se ogni intorno di x_0 contiene infiniti punti di X minori di x_0

ESEMPI

1) $X =]1, 3[$



$D_i^+(X) = [1, 3[$

$D_i^-(X) =]1, 3]$

2) $X =]-3, +\infty[$

$D_x^+(X) = [-3, +\infty[$

$D_x^-(X) =]-3, +\infty[\cup \{+\infty\}$.

Def: Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ un insieme e sia $f: X \to \mathbb{R}$ una funzione. Sia $x_0 \in D_x^+(X)$. Sia $L \in \overline{\mathbb{R}}$. Si dice che L È IL LIMITE DI $f(x)$ PER x CHE TENDE A x_0 DA DESTRA (o che L è il LIMITE DESTRO di $f(x)$ per x che tende a x_0) se:

$\forall V \in \mathcal{I}_L \ \exists U \in \mathcal{I}_{x_0}$ t.c. $\forall x \in U \cap X$ con $x > x_0$ si ha $f(x) \in V$.

In tal caso si scrive che $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$

Def: Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ un insieme e sia $f: X \to \mathbb{R}$ una funzione. Sia $x_0 \in D_x^-(X)$. Sia $L \in \overline{\mathbb{R}}$. Si dice che L È IL LIMITE DI $f(x)$ PER x CHE TENDE A x_0 DA SINISTRA (o che L è il LIMITE SINISTRO di $f(x)$ per x che tende a x_0) se:

$\forall V \in \mathcal{I}_L \ \exists U \in \mathcal{I}_{x_0}$ t.c. $\forall x \in U \cap X$ con $x < x_0$ si ha $f(x) \in V$.

In tal caso si scrive che $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$

ESEMPIO

Se $f(x) = \frac{1}{x}$, allora

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

$$\Rightarrow \nexists \lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$$

OSS Se $x_0 \in D_i^+(X) \cap D_i^-(X)$:

$$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = L \iff \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = L.$$

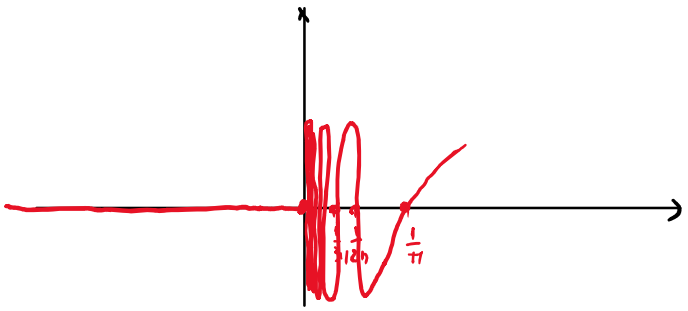
cioè:

Se $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ e $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ o non esistono o sono diversi allora, $\nexists \lim_{x \to x_0} f(x)$.

Nota: Anche limiti destri e/o sinistri possono non esistere.

ESEMPIO

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

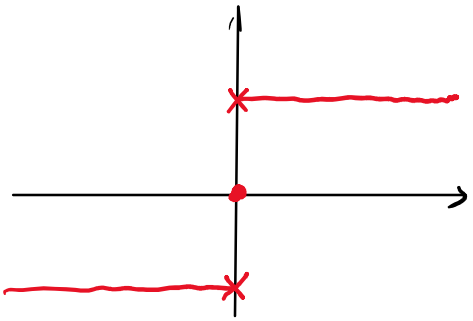


$$\nexists \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

$$\exists \lim_{x \to x_0^-} f(x) = 0.$$

ESEMPIO 2

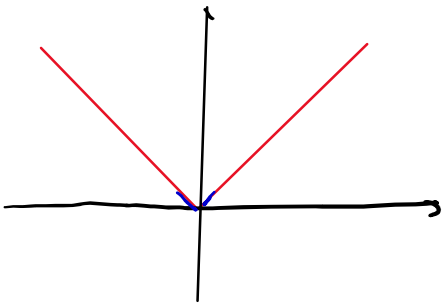
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$



$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$ $\quad \nexists \lim_{x \to x_0} f(x).$ $\quad f(0) = 0$

ESEMPIO 3



$f(x) = |x|$

$\lim_{x \to 0^+} |x| = \lim_{x \to 0} x = 0$

$\lim_{x \to 0^-} |x| = \lim_{x \to 0^-} -x = 0$

quindi $\exists \lim_{x \to 0} |x| = 0$

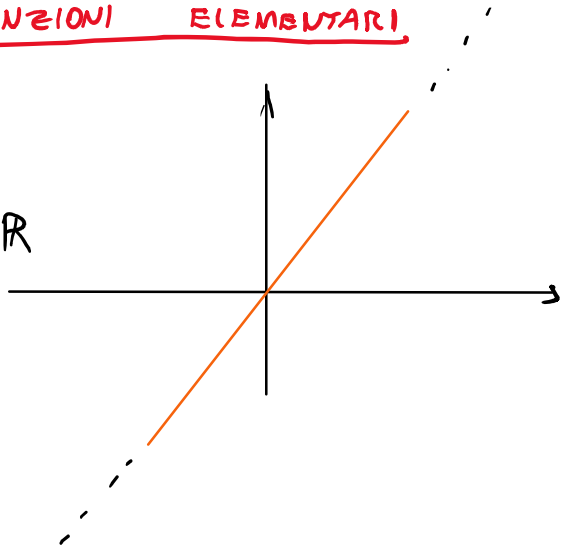
LIMITI DI ALCUNE FUNZIONI ELEMENTARI

1) $f(x) = x$

$\lim_{x \to x_0} x = x_0 \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$

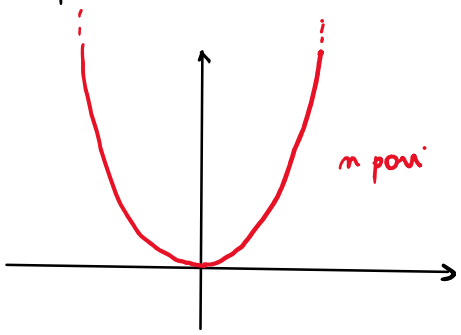
$\lim_{x \to +\infty} x = +\infty$

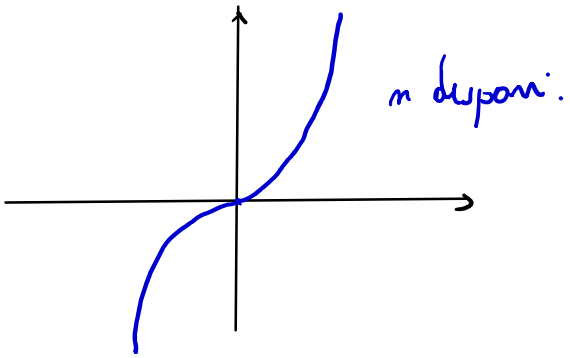
$\lim_{x \to -\infty} x = -\infty.$



2) Potenze naturali

$f(x) = x^n$ con $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$



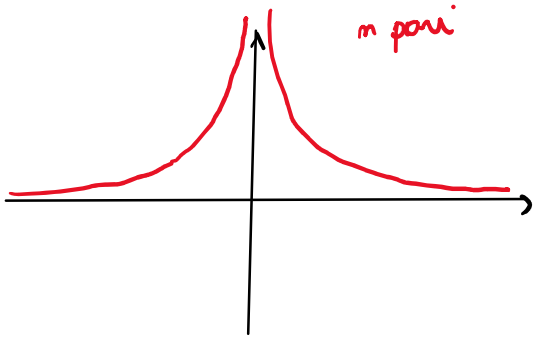


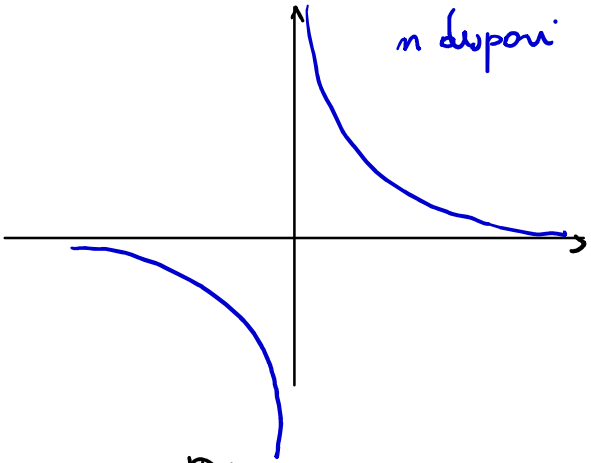
- $\lim_{x \to x_0} x^n = x_0^n \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$ $\quad \left(\lim_{x \to 2} x^4 = 2^4 = 16 \right)$
- $\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty$
- $\lim_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } n \text{ è pari} \\ -\infty & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$

3) Potenze intere negative

$f(x) = x^{-n}$ con $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

$= \frac{1}{x^n}$





- $\lim_{x \to x_0} \frac{1}{x^n} = \frac{1}{x_0^n}$ con $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = \frac{1}{+\infty} = 0$ $\quad (0^+)$
- $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^n} = \frac{1}{\pm\infty} = 0$ $\quad \begin{pmatrix} 0^+ \text{ se } n \text{ è pari} \\ 0^- \text{ se } n \text{ è dispari} \end{pmatrix}$

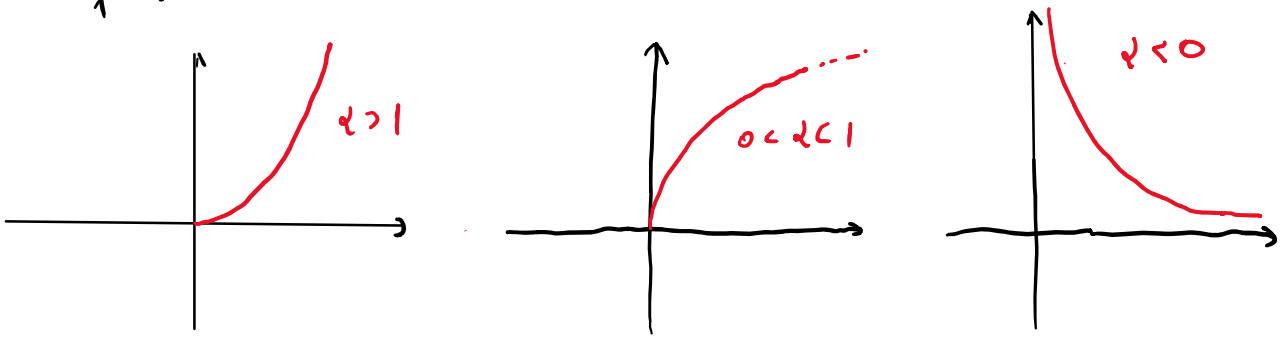
- $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^n}$ $\begin{cases} = +\infty & \text{se } n \text{ è pari} \\ \nexists & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$

perché $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$

$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} +\infty & \text{se } n \text{ è pari} \\ -\infty & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$

4) Potenze reali

$f(x) = x^\alpha \quad \text{con } \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$



- Se $\alpha > 0$ (primi due casi)

$\lim_{x\to x_0} x^\alpha = x_0^\alpha \quad \forall\, \alpha > 0 \quad \forall\, x_0 \in [x_0, +\infty[$

$\lim_{x\to +\infty} x^\alpha = +\infty$

$\lim_{x\to 0} x^\alpha = 0$

- Se $\alpha < 0$

$\lim_{x\to +0} x^\alpha = 0 \quad , \quad \lim_{x\to 0^+} x^\alpha = +\infty$

$\lim_{x\to x_0} x^\alpha = x_0^\alpha \quad \forall\, x_0 \in]0, +\infty[.$

ESEMPIO

$\lim_{x\to +\infty} x^{-\sqrt{2}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x^{\sqrt{2}}} = 0$

$$\lim_{x \to 0^+} x^{-\sqrt{2}} = \lim_{x \to 0} x^{-\sqrt{2}} \quad \left(\text{per } x^{-\sqrt{2}} \text{ è def. solo per } x > 0 \right)$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^{\sqrt{2}}} = +\infty.$$