MATEMATICA - LEZIONE 40

mercoledì 10 dicembre 2025 09:01

Un'equazione differenziale è un'equazione in cui compaiono:

- una variabile x (o t)
- una funzione incognita $y(x)$ (o $y(t)$)
- alcune derivate della funzione $y(x)$

$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$$

n è detto ordine dell'equazione.

- Un'equazione differenziale ha infinite soluzioni

ESEMPIO

$$y'(x) = y(x)$$

$$y(x) = c\,e^{x}$$

SOLUZIONE GENERALE
INTEGRALE GENERALE

- Spesso un'equazione differenziale è associata a delle "condizioni iniziali":

$$\begin{cases} y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

n condizioni iniziali

Sotto opportune condizioni un problema di questo tipo ha un'unica soluzione.

Questo problema è noto come PROBLEMA DI CAUCHY.

ESEMPIO

$$y''(x) = x$$

In questo caso possiamo risolvere l'eq. integrando due volte:

$$y'(x) = \int x \, dx = \frac{1}{2}x^2 + c_1$$

$$y(x) = \int\left(\frac{1}{2}x^2 + c_1\right) dx = \underbrace{\frac{1}{6}x^3 + c_1 x + c_2}_{\text{SOLUZIONE GENERALE.}}$$

Consideriamo ora il problema di Cauchy.

$$\begin{cases} y''(x) = x \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$$

Possiamo usare le condizioni iniziali per determinare i valori di c_1 e c_2:

$$y(x) = \frac{1}{6}x^3 + c_1 x + c_2 \Rightarrow y(0) = c_2$$

$$y'(x) = \frac{1}{2}x^2 + c_1 \qquad y'(0) = c_1$$

Vogliamo $\begin{cases} c_2 = 1 \\ c_1 = 2 \end{cases}$

L'unica soluzione del problema di Cauchy è

$$y(x) = \frac{1}{6}x^3 + 2x + 1$$

Notazione:

$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$$

si scrive anche omettendo la dipendenza da x all'interno di y(x) e delle derivate di y(x):

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

Ad esempio:

$y''(x) = x$ si scrive anche come $y'' = x$

Equazioni di I ordine a variabili separabili.

Sono equazioni del tipo

$y' = a(x)\, b(y)$ $\quad \left(y'(x) = a(x)\, b(y(x)) \right)$

Def Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ si dice che f è DI CLASSE C^1 in I se f è derivabile in I e f' è continua in I (si scrive che $f \in C^1(I)$)

TEOREMA (ESISTENZA E UNICITÀ DELLE SOLUZIONI)

Siano I, J due intervalli aperti (e non vuoti).
Siano $a : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $b : J \longrightarrow \mathbb{R}$.
Siano $x_0 \in I$, $y_0 \in J$. Se a è continua in I e $b \in C^1(J)$ allora $\exists\, I_0 \subseteq I$ intervallo tale che $x_0 \in I_0$ e tale che il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = a(x)\, b(y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

ha un'unica soluzione $y \in C^1(I_0)$.

Idea per risolvere $y' = a(x)\, b(y)$

Separiamo le variabili:

$$\frac{y'}{b(y)} = a(x)$$

$$\frac{y'(x)}{b(y(x))} = a(x)$$

$$\int \frac{y'(x)}{b(y(x))}\,dx = \int a(x)\,dx$$

Si calcolano i due integrali:

$$\int a(x)\,dx = A(x) + c_1$$

$$\int \frac{y'(x)}{b(y(x))}\,dx \overset{\substack{dy = y'(x)dx \\ y = y(x)}}{=} \int \frac{dy}{b(y)} = B(y) + c_2$$

$$= B(y(x)) + c_2$$

Quindi

$$B(y(x)) + c_2 = A(x) + c_1$$

$$B(y(x)) = A(x) + \underbrace{c_1 - c_2}_{c}$$

$$B(y(x)) = A(x) + c$$

(se si può invertire B)

$$y(x) = B^{-1}(A(x) + c)$$

Attenzione

1) Si divide per $b(y)$, questo si può fare solo se $b(y) \neq 0$.

2) B può non essere invertibile.

OSS Siano I, J, a, b come nel teorema precedente. Se $\exists\, x_0 \in I$ tale che $b(y(x_0)) = 0$ e y risolve l'equazione differenziale $y' = a(x) \cdot b(y)$ allora y è definita in tutto I e $y(x) = y(x_0)$ $\forall x \in I$.

IDEA
Il problema di Cauchy $\begin{cases} y' = a(x)\, b(y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

ha sempre un'unica soluzione. Se $b(y_0) = 0$ la soluzione di questo problema è $y(x) = y_0$.

Un'equazione a variabili separabili può avere solo:

1) soluzioni costanti del tipo $y(x) = y_0$ con $b(y_0) = 0$.

2) Soluzioni per cui $b(y(x)) \neq 0$ $\forall x$ in cui y è definita.

ESEMPI

1) $$y' = x\, y^2$$

Equazione di I ordine a variabili separabili.
$a(x) = x$, $b(y) = y^2$.

- Soluzioni costanti:
$b(y) = 0 \iff y^2 = 0 \iff y = 0$
$y(x) = 0$ $\forall x$ è l'unica soluzione costante.

• Soluzioni non costanti:

$$y' = x y^2$$

$$\frac{y'}{y^2} = x$$

$$\int \frac{y'(x)}{y(x)^2}\, dx = \int x\, dx.$$

$$\int x\, dx = \frac{1}{2}x^2 + c_1$$

$$\int \frac{y'(x)}{y(x)^2}\, dx = \int \frac{1}{y^2}\, dy = \int y^{-2} dy = \frac{y^{-1}}{-1} + c_2$$

$$= -\frac{1}{y} + c_2$$

Quindi si deve avere:

$$-\frac{1}{y} = \frac{1}{2}x^2 + c \qquad (c = c_1 - c_2)$$

$$\frac{1}{y} = -\frac{1}{2}x^2 - c$$

$$y(x) = \frac{1}{-\frac{1}{2}x^2 - c} = -\frac{1}{\frac{1}{2}x^2 + c}$$

Soluzione generale dell'equazione

$$y(x) = -\frac{1}{\frac{1}{2}x^2 + c} \quad \vee \quad y(x) = 0.$$

• Def I punti y_0 in cui $h(y_0) = 0$ si dicono PUNTI DI EQUILIBRIO PER L'EQUAZIONE DIFF. $y' = a(x)\, h(y)$ e la soluzione $y(x) = y_0$ è detta SOLUZIONE DI EQUILIBRIO.

2) $$y' = \frac{(y-1)^4}{x^2+1} = \underbrace{\frac{1}{x^2+1}}_{a(x)} \underbrace{(y-1)^4}_{b(y)}$$

Eq. di I ordine a variabili separabili.

- Soluzioni costanti:

$$b(y)=0 \iff (y-1)^4 = 0$$
$$\iff y = 1$$

$y(x) = 1 \quad \forall x$ è l'unica soluzione costante.

- Soluzioni non costanti:

$$y' = \frac{(y-1)^4}{x^2+1}$$

$$\frac{y'}{(y-1)^4} = \frac{1}{x^2+1}$$

$$\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \arctan x + C_1$$

$$\int \frac{y'(x)}{(y(x)-1)^4}\,dx = \int \frac{1}{(y-1)^4}\,dy$$
$$= \int (y-1)^{-4}\,dy$$
$$= \frac{1}{-3}(y-1)^{-3} + C_2$$
$$= -\frac{1}{3}\frac{1}{(y-1)^3} + C_2$$

Quindi

$$-\frac{1}{3}\frac{1}{(y-1)^3} = \arctan x + C$$

$$\frac{1}{(y-1)^3} = -3\arctan x - 3C$$

$$\frac{1}{y-1} = -\sqrt[3]{3\arctan x + 3C}$$

$$y-1 = -\frac{1}{\sqrt[3]{3\arctan x + 3C}}$$

$$y(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt[3]{3\arctan x + 3C}}$$

Soluzione generale:

$$y(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt[3]{3\arctan x + 3C}} \quad \vee \quad y(x) = 1.$$

Notazione Matematica

$$\frac{y'}{b(y)} = a(x)$$

$$\int \frac{y'(x)}{b(y(x))}\,dx = \int a(x)\,dx$$

$$\int \frac{dy}{b(y)} = \int a(x)\,dx$$

Notazione in Fisica

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{b(y)} = a(x)$$

$$\frac{dy}{b(y)} = a(x)\,dx$$

$$\int \frac{dy}{b(y)} = \int a(x)\,dx$$

3)

$$y' = e^{2x+y}$$

$$y' = \underbrace{e^{2x}}_{a(x)} \cdot \underbrace{e^{y}}_{b(y)}$$

- Soluzioni costanti:

$$e^y = 0 \qquad \text{impossibile.}$$

Non ci sono soluzioni costanti.

- Soluzioni non costanti

$$\frac{y'}{e^y} = e^{2x}$$

$$\int \frac{1}{e^y}\,dy = \int e^{2x}\,dx$$

$$\int e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}e^{2x} + c_1$$

$$\int \frac{1}{e^y}\,dy = \int e^{-y}\,dy = -e^{-y} + c_2$$

$$-e^{-y} = \frac{1}{2}e^{2x} + c$$

$$e^{-y} = -\frac{1}{2}e^{2x} - c$$

(si noti che necessariamente $c < 0$)

$$-y = \ln\left(-\frac{1}{2}e^{2x} - c\right)$$

$$y = -\ln\left(-\frac{1}{2}e^{2x} - c\right)$$

---

4) $y' = \cos(2x) \cdot \frac{1}{\underbrace{y}_{\ln(y)}}$

1) Soluzioni costanti:

$$\frac{1}{y} = 0 \qquad \text{impossibile.}$$

Non ci sono soluzioni costanti.

2) Soluzioni non costanti:

$$y' = \cos(2x)\,\frac{1}{y}$$

$$y\,y' = \cos(2x)$$

$$\int y\,dy = \int \cos(2x)\,dx$$

$$\frac{1}{2}y^2 + C_1 = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x) + C_2$$

$$\frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x) + C$$

$$y^2 = \operatorname{sen}(2x) + 2C$$

$$\sqrt{y^2} = \operatorname{sen}(2x) + 2C$$

$$|y| = \sqrt{\operatorname{sen}(2x) + 2C}$$

$$y(x) = \sqrt{\operatorname{sin}(2x) + 2C} \quad \vee \quad y(x) = -\sqrt{\operatorname{sin}(2x) + 2C}$$

---

5) Consideriamo il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \cos(2x)\cdot\dfrac{1}{y} & \leftarrow \text{equazione} \\ y(0) = -2 & \leftarrow \text{condizione iniziale.} \end{cases}$$

Sappiamo che $y(x)$ deve essere del tipo

$$\underbrace{y(x) = \sqrt{\operatorname{sin}(2x) + 2C}}_{\text{sol. positive}} \quad \vee \quad \underbrace{y(x) = -\sqrt{\operatorname{sin}(2x) + 2C}}_{\text{sol. negative}}$$

Vogliamo $y(0) = -2 < 0$

$$y(x) = -\sqrt{\operatorname{sin}(2x) + 2C}$$

$y(0) = -\sqrt{2C}$

Vogliamo $-\sqrt{2C} = -2$

$\sqrt{2C} = 2$

$2C = 4 \qquad (C=2)$

$y(x) = -\sqrt{\sin(2x) + 4}$.

è l'unica soluzione del problema di Cauchy.

---

6)

$$\begin{cases} y' = e^{3x} \sin y \\ y(0) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

→ equazione a variabili separabili

→ condizione iniziale.

- Poiché $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \neq 0$ la soluzione del problema di Cauchy non può essere costante.

$(\sin y = 0 \Leftrightarrow y = k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z})$

- $y' = e^{3x} \sin y$

$$\frac{y'}{\sin y} = e^{3x}$$

$$\int \frac{1}{\sin y}\, dy = \int e^{3x}\, dx = \frac{1}{3} e^{3x} + C_1$$

$$\int \frac{1}{\sin y}\, dy$$

Sostituzione

$t = \tan \frac{y}{2}$

[Ricordare

$$\operatorname{sen} y = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos y = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$]

$$t = \tan\frac{y}{2}$$

$$\arctan t = \frac{y}{2}$$

$$y = 2\arctan t$$

$$dy = \frac{2}{1+t^2}\,dt$$

Allora

$$\int \frac{1}{\sin y}\,dy = \int \frac{1}{\frac{\cancel{2}t}{\cancel{1+t^2}}} \cdot \frac{\cancel{2}}{\cancel{1+t^2}}\,dt$$

$$= \int \frac{1}{t}\,dt$$

$$= \ln|t| + c_2$$

$$= \ln\left|\tan\frac{y}{2}\right| + c_2$$

$$\ln\left|\tan\frac{y}{2}\right| = \frac{1}{3}e^{3x} + c \qquad *$$

Vogliamo $y(0) = \frac{\pi}{2}$ quindi possiamo determinare subito c.

$$\ln\left|\tan\frac{\pi}{4}\right| = \frac{1}{3}e^{0} + c$$

$$0 = \frac{1}{3} + c \qquad \Rightarrow \qquad c = -\frac{1}{3}$$

$$(*) \qquad \ln\left|\tan\frac{y}{2}\right| = \frac{1}{3}e^{3x} - \frac{1}{3}$$

$$\left|\tan\frac{y}{2}\right| = e^{\frac{1}{3}e^{3x}-\frac{1}{3}}$$

$$\tan\frac{y}{2} = e^{\frac{1}{3}e^{3x}-\frac{1}{3}} \quad \vee \quad \tan\frac{y}{2} = -e^{\frac{1}{3}e^{3x}-\frac{1}{3}}$$

Per capire quale soluzione prendere usiamo di nuovo che $y(0)=\frac{\pi}{2}$

La soluzione è quella con il segno $+$.

$$\tan\frac{y}{2} = e^{\frac{1}{3}e^{3x}-\frac{1}{3}}$$

$$\frac{y}{2} = \arctan\left(e^{\frac{1}{3}e^{3x}-\frac{1}{3}}\right)$$

$$y = 2\arctan\left(e^{\frac{1}{3}e^{3x}-\frac{1}{3}}\right)$$

---

7) Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x y' + y^3 = 0 \\ y(-1) = 0 \end{cases}$$

$x y' = -y^3 \iff y' = -\frac{y^3}{x}$

$\iff y' = -\frac{1}{x}\, y^3$

$$b(y) = -y^3$$
$$b(0) = 0$$

$y(x)=0 \ \forall x$ è una sol. dell'equazione diff. e risolve anche $y(-1)=0$. Quindi è l'unica soluzione del problema di Cauchy.

$$\begin{cases} x y' = y^3 \\ y(-1) = 1 \end{cases}$$

Stavolta la soluzione non è costante.

$$y' = -\frac{1}{x} y^3$$

$$\frac{y'}{-y^3} = \frac{1}{x}$$

$$-\int \frac{1}{y^3}\, dy = \int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x| + c_1$$

$$-\int \frac{1}{y^3}\, dy = -\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{y^2}\right) + c_2$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{y^2} + c_2$$

Quindi

$$\frac{1}{2}\frac{1}{y^2} = \ln|x| + c$$

Conviene determinare c.

$$y(-1) = 1$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1^2} = \ln|-1| + c$$

$$\frac{1}{2} = c$$

$$\frac{1}{2}\frac{1}{y^2} = \ln|x| + \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{y^2} = 2\ln|x| + 1$$

$$y^2 = \frac{1}{2\ln|x| + 1}$$

$$y = \pm\sqrt{\frac{1}{2\ln|x|+1}}$$

Qual è il segno giusto?

$y(-1) = 1. > 0$ il segno corretto è $+$:

$$y(x) = \sqrt{\frac{1}{2\ln|x|+1}} = \frac{1}{\sqrt{2\ln|x|+1}}$$

Equazioni lineari di I ordine

$$y' = a(x)\,y + g(x)$$

OSS Se $g(x) = 0$, l'equazione è a variabili separabili

$$y' = a(x)\,y$$

soluzione costante: $y(x) = 0$

soluzioni non costanti:

$$y' = a(x)\,y$$

$$\frac{y'}{y} = a(x)$$

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int a(x)\,dx = A(x) + c_1$$

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \ln|y| + c_2$$

$$\ln|y| = A(x) + c$$

$$|y| = e^{A(x)+c}$$

$$y = \pm e^{A(x)+c} = \pm e^{c} e^{A(x)}$$

Soluzione generale:

$$y(x) = e^{c} e^{A(x)} \quad \vee \quad y(x) = -e^{c} e^{A(x)} \quad \vee \quad y(x) = 0.$$

Si può scrivere che la soluzione generale è

$$y(x) = K e^{A(x)}.$$

RICORDARE Per un'equazione del tipo $y' = a(x)\, y$, la soluzione generale è

$y(x) = K e^{A(x)}$ dove $A(x)$ è una primitiva di $a(x)$.

ESEMPIO

$$y' = y$$

$$y' = 1 \cdot y$$

$a(x) = 1$ $\qquad$ $A(x) = x$. Soluzione generale

$$y(x) = K e^{x}.$$