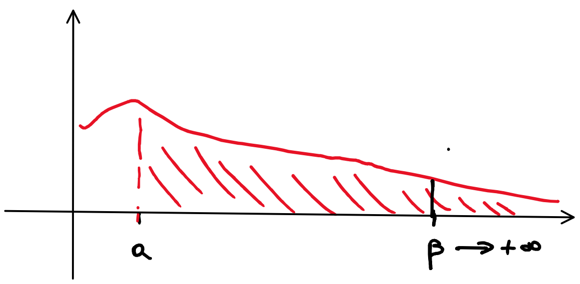
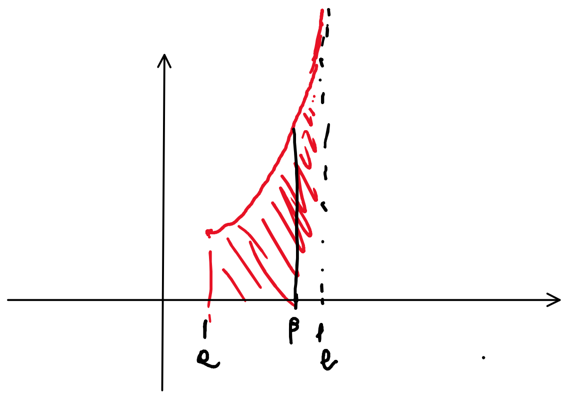
MATEMATICA - LEZIONE 39

venerdì 5 dicembre 2025 11:08

Abbiamo definito $\int_a^b f(x)\,dx$ quando $a, b \in \mathbb{R}$ e $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è limitata.

Domanda? E se $a = -\infty$ o $b = +\infty$ o f non è limitata?





Idea per definire $\int_a^b f(x)\,dx$ quando b è $+\infty$ oppure quando f non è limitata in un intorno di b:

1) Si fissa $\beta \in]a, b[$ e si calcola $\int_a^\beta f(x)\,dx$

2) Si calcola $\lim_{\beta \to +\infty} \int_a^\beta f(x)\,dx$.
(o $\beta \to b^-$)

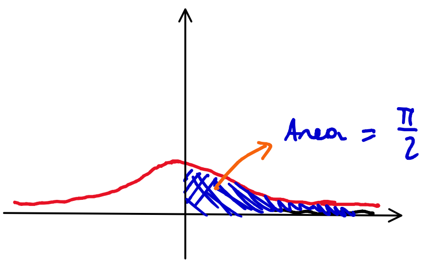
ESEMPI

1) $$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{\beta \to +\infty} \int_0^\beta \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$$= \lim_{\beta \to +\infty} \arctan x \Big|_0^\beta$$

$$= \lim_{\beta \to +\infty} \arctan \beta - \underbrace{\arctan 0}_{=0}$$

$$= \lim_{\beta \to +\infty} \arctan \beta = \frac{\pi}{2}$$



2) $\int_0^1 \frac{1}{1-x}\,dx$

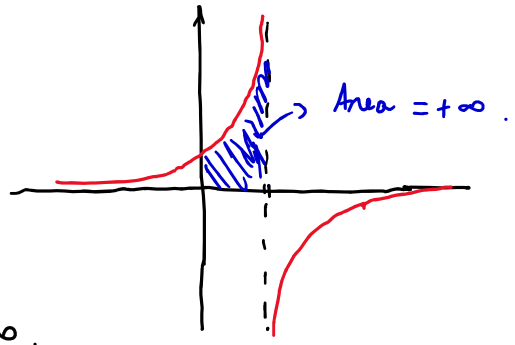
$= \lim_{\beta \to 1^-} \int_0^\beta \frac{1}{1-x}\,dx$

$= \lim_{\beta \to 1^-} -\ln(1-x)\Big|_0^\beta$

$= \lim_{\beta \to 1^-} -\ln(1-\beta) + \underbrace{\ln 1}_{0}$

$= \lim_{\beta \to 1^-} -\ln(1-\beta) = -(-\infty) = +\infty.$

$\boxed{\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{1-x} = +\infty \text{ quindi la funzione ha un asintoto verticale in } x = 1}$



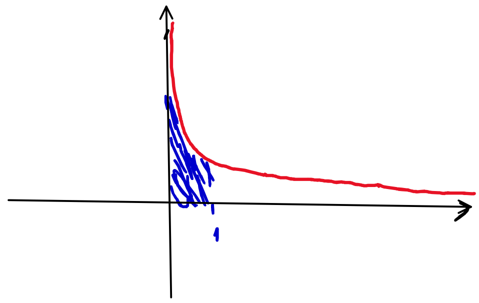
3) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

In questo caso l'asintoto è nell'estremo sinistro dell'intervallo quindi si calcola $\int_\alpha^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ e si fa il limite per $\alpha \to 0^+$

$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

$= \lim_{\alpha \to 0^+} \int_\alpha^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

$= \lim_{\alpha \to 0^+} 2\sqrt{x}\Big|_\alpha^1 = \lim_{\alpha \to 0^+} 2 - 2\sqrt{\alpha} = 2$



Def: (integrali generalizzati con "problemi" nell'estremo destro)

Siano $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ con $a < b$ e sia $f: [a, b[\to \mathbb{R}$

Si dice che f è INTEGRABILE IN SENSO GENERALIZZATO / IMPROPRIO IN $[a, b[$ se

1) $\forall\, \beta \in \,]a, b[$ f è integrabile secondo Riemann in $[a, \beta]$.

2) $\exists \lim_{\beta \to b^-} \int_a^\beta f(x)\, dx \in \mathbb{R}$.

Se $b = +\infty$
$\lim_{\beta \to b^-} = \lim_{\beta \to +\infty}$

In tal caso il limite si indica con $\int_a^b f(x)\, dx$.

Def (Integrali generalizzati con "problemi nell'estremo sinistro")
Siano $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ e $b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ e sia $f : \,]a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Si dice che f è INTEGRABILE IN SENSO GENERALIZZATO IN $]a, b]$ se:

1) $\forall\, \alpha \in \,]a, b[$ f è integrabile secondo Riemann in $[\alpha, b]$

2) $\exists \lim_{\alpha \to a^+} \int_\alpha^b f(x)\, dx \in \mathbb{R}$

Nota: Se $f : \,]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ con $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ e $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Esiste un qualsiasi $c \in \,]a, b[$ si può definire:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$$

Il simbolo $\int_a^b f(x)\, dx$ si usa anche quando f non è integrabile in senso generalizzato. nel senso dei limiti:

Se $f : [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$, $\int_a^b f(x)\, dx := \lim_{\beta \to b^-} \int_a^\beta f(x)\, dx$

Il risultato però può anche essere $+\infty$ / $-\infty$ o può succedere che il limite non esista.

Def: (carattere di un integrale generalizzato).

Siano $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $a < b$ e sia $f: [a, b[\to \mathbb{R}$

(analoghe definizioni si possono dare nel caso in cui $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $b \in \mathbb{R}$ e $f:]a, b] \to \mathbb{R}$)

- Si dice che $\int_a^b f(x)\,dx$ è CONVERGENTE se f è integrabile in senso generalizzato.
- Si dice che $\int_a^b f(x)\,dx$ è DIVERGENTE A $+\infty$ (o a $-\infty$) se $\lim_{\beta \to b^-} \int_a^b f(x)\,dx = +\infty$ $(-\infty)$
- Si dice che $\int_a^b f(x)\,dx$ non esiste (o non è regolare) se $\nexists \lim_{\beta \to b^-} \int_a^b f(x)\,dx$

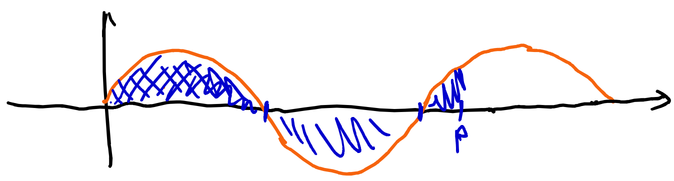
ESEMPI

1) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}$ convergente.

2) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\beta \to +\infty} \int_1^\beta \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\beta \to +\infty} \ln \beta = +\infty.$

l'integrale è divergente a $+\infty$

3) $\int_0^{+\infty} \sin x\,dx \quad \nexists$



$$\lim_{\beta \to +\infty} \int_0^\beta \sin x\,dx = \lim_{\beta \to +\infty} -\cos x \Big|_0^\beta =$$

$$= \lim_{\beta \to +\infty} (1 - \cos \beta) \quad \nexists$$

4) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ — è convergente $\alpha > 1$
— è divergente (a $+\infty$) se $\alpha \leq 1$.

Se $\alpha = 1$ lo abbiamo visto nell'esempio 2.
Se $\alpha \neq 1$:

$$\int_1^\beta \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \int_1^\beta x^{-\alpha}\,dx = \frac{1}{1-\alpha}\, x^{1-\alpha}\Big|_1^\beta$$

$$= \frac{1}{1-\alpha}\beta^{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} \xrightarrow{\beta \to +\infty} \begin{cases} +\infty & \text{se } 1-\alpha > 0 \quad (\alpha < 1) \\ -\dfrac{1}{1-\alpha} & \text{se } 1-\alpha < 0 \quad (\alpha > 1) \end{cases}$$

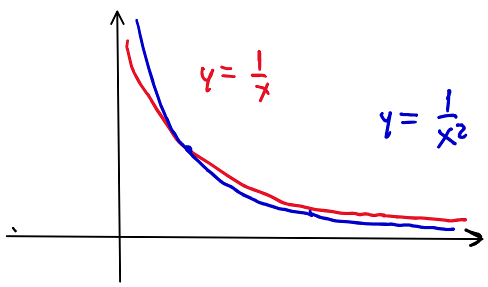
5) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx$

$$= \lim_{\beta \to +\infty} \int_0^\beta e^{-x}\,dx = \lim_{\beta \to +\infty} -e^{-x}\Big|_0^\beta$$

$$= \lim_{\beta \to +\infty} -e^{-\beta} + 1 = 1$$

l'integrale è convergente.

6) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ è convergente se $\alpha < 1$
è divergente se $\alpha \geq 1$.



In alcuni casi è possibile determinare il carattere di un integrale generalizzato senza calcolare esplicitamente una primitiva di $f(x)$.

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\,\arctan x}{1 + x^4}\,dx$$

Idea: per $x \to +\infty$

$$\frac{\sqrt{x}\,\arctan x}{1+x^4} \sim \frac{\sqrt{x}\,\frac{\pi}{2}}{x^4} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{x^{4-\frac{1}{2}}} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{x^{\frac{7}{2}}}$$

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{7}{2}}}\,dx$ è convergente $\frac{7}{2} > 1$.

si può dimostrare che anche $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\,\arctan x}{1+x^4}\,dx$

TEOREMA (CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO PER INT. GENERALIZZATI)

Siano $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ con $a < b$ e siano $f: [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$, $g: [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$. Assumiamo che

1) $f(x), g(x) > 0$ in $[a, b[$

2) f e g siano integrabili in $[a, \beta]$ $\forall \beta \in]a, b[$ (secondo Riemann)

3) $\exists \lim\limits_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = L \in]0, +\infty[$

($f(x) \sim L\, g(x)$ per $x \to b^-$).

Allora $\int_a^b f(x)\,dx$ e $\int_a^b g(x)\,dx$ hanno lo stesso carattere.

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}\,\arctan x}{1+x^4} \qquad g(x) = \frac{1}{x^{\frac{7}{2}}}$$

$b = +\infty$ abbiamo visto che

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2}\, g(x) \quad \text{per } x \to +\infty$$

(si noti che f e g sono continue in $[1, +\infty[$ quindi sono integrabili in $[1, \beta]$ $\forall \beta > 1$).

Quindi $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ ha lo stesso carattere di

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{\pi}{2}}}\, dx \text{ che è divergente.}$$

ESEMPI

1) $$\int_2^{+\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2+x+1}\, dx$$

$$\frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2+x+1} \overset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$$

Siccome $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x}\, dx = \ln x \Big|_2^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} \ln x - \ln 2 = +\infty$

è divergente, anche l'integrale iniziale è divergente.

Notazione

Se $f: [a, b[\to \mathbb{R}$ e F è una primitiva di f

$$F(x)\Big|_a^b := \lim_{\beta\to b^-} F(x)\Big|_a^\beta = \lim_{\beta\to b^-} F(\beta) - F(a)$$

Quindi

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(x)\Big|_a^b = \lim_{\beta\to b^-} F(\beta) - F(a).$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx = \arctan x\Big|_0^{+\infty} = \lim_{\beta\to+\infty} \arctan\beta - 0 = \frac{\pi}{2}$$

2) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x^2}\, dx$$

$$\frac{\sin x}{x^2} \longrightarrow +\infty \quad \text{se } x\to 0^+ \quad \text{(asintoto verticale in 0)}$$

$$\frac{\sin x}{x^2} = \frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{x} \sim \frac{1}{x} \quad \text{per } x\to 0^+$$

Siccome $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{x}\,dx$ è divergente anche $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x^2}\,dx$ è divergente.

OSS Se $f(x) \geq 0$ allora $\int_a^{\beta} f(x)\,dx$ è una funzione crescente in β.

Quindi $\exists \lim_{\beta \to b^-} \int_a^{\beta} f(x)\,dx \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

$\int_a^{b} f(x)\,dx$ può essere solo convergente o divergente.

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx \quad ?$$

Curiosità: $\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \underbrace{\int_0^{1} e^{-x^2}\,dx}_{\in \mathbb{R}} + \int_1^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{-x^2}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^{x^2}} = 0$$

$\exists\, R > 0$ t.c. $\frac{e^{-x^2}}{\frac{1}{x^2}} < 1$ se $x \geq R$

$e^{-x^2} < \frac{1}{x^2}$ se $x \geq R$

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \underbrace{\int_0^{R} e^{-x^2}\,dx}_{\in \mathbb{R}} + \int_R^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$$

$$\leq \underbrace{\int_0^R e^{-x^2}dx}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{\int_R^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx}_{\in \mathbb{R}}$$ perché l'integrale è convergente.

$$\left(\int_R^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\Big|_R^{+\infty} = \lim_{\beta\to+\infty} -\frac{1}{\beta} + \frac{1}{R} = \frac{1}{R} \in \mathbb{R} \right)$$

Segue che $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ è convergente.

TEOREMA (CRITERIO DEL CONFRONTO PER INTEGRALI GENERALIZZATI)

Siano $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$, $f,g : [a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$.

Supponiamo che:

1) $0 \leq f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a,b[$.

2) f e g siano R-integrabili in $[a,\beta]$ $\forall \beta \in]a,b[$

Allora valgono le seguenti implicazioni:

Se $\int_a^b g(x)\,dx$ è convergente, anche $\int_a^b f(x)\,dx$ è convergente

Se $\int_a^b f(x)\,dx$ è divergente, anche $\int_a^b g(x)\,dx$ è divergente.

Equazioni differenziali (ordinarie).

Sono equazioni del tipo $F(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$

cioè equazioni in cui compaiono

- Una variabile x
- Una funzione incognita $y(x)$ (da determinare)
- Alcune derivate di $y(x)$.

ESEMPI

1) $y''(x) + y'(x) = y(x) + 1$ (ORDINE 2)

2) $y^{(5)}(x) = \cos x + y(x)$ (ORDINE 5)

L'ordine di derivazione massimo con cui $y(x)$ compare nell'equazione si dice ORDINE DELL'EQUAZIONE differenziale.

- Un'equazione del tipo $y^{(n)}(x) = f(x, y(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$ si dice un'equazione in FORMA NORMALE

$y^{(4)}(x) = y(x)^3$ è un'equazione di ordine 4 in forma normale

$e^{y''(x)} = 1 + y(x)^4$ è di ordine 2 non è in forma normale.

$y''(x) = \ln(1 + y(x)^4)$ è in forma normale.

OSS In generale un'equazione differenziale ha infinite soluzioni:

ESEMPI

1) $y'(x) = y(x)$

$y(x) = e^x$ è una soluzione.

$y(x) = 2e^x$ è una soluzione $\left(y'(x) = (2e^x)' = 2e^x = y(x) \right)$

$y(x) = e^{x+1} = e\,e^x$ è una soluzione.

$y(x) = c\,e^x$ è una soluzione $\forall\, c \in \mathbb{R}$.

Si può dimostrare che l'espressione $y(x) = c\,e^x$ descrive tutte le soluzioni dell'equazione differenziale $y'(x) = y(x)$.

2) $y''(x) + y(x) = 0 \qquad \left(y''(x) = -y(x) \right)$

$y(x) = \sin x$

$y(x) = \cos x$ sono due soluzioni

Cui in generale $\forall\, C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, la funzione
$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ è una soluzione.

Si definisce SOLUZIONE GENERALE O INTEGRALE GENERALE
l'insieme di tutte le soluzioni dell'equazione diff.

1) $y'(x) = a(y(x))\, b(x)$ EQUAZIONI A VARIABILI SEPARABILI

2) $y'(x) = a(x)\, y(x) + b(x)$ EQUAZIONI LINEARI DI PRIMO ORDINE

3) $a\, y''(x) + b\, y'(x) + c\, y(x) = g(x)$

EQUAZIONI LINEARI DI SECONDO ORDINE A COEFFICIENTI COSTANTI