MATEMATICA - LEZIONE 6

mercoledì 8 ottobre 2025 09:06

ESERCIZIO

Risolvere la disequazione

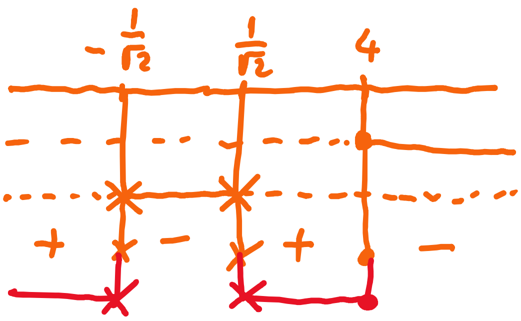
$$\frac{|x-1|-3}{1-2x^2} \geq 0$$

$$|x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{se } x-1 \geq 0 \\ -x+1 & \text{se } x-1 < 0 \end{cases}$$

La disequazione è equivalente a:

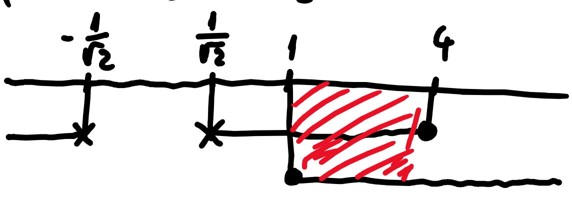
$$① \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ \dfrac{x-1-3}{1-2x^2} \geq 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x-1 < 0 \\ \dfrac{-x+1-3}{1-2x^2} \geq 0 \end{cases} ②$$

$$① \begin{cases} x \geq 1 \\ \dfrac{x-4}{1-2x^2} \geq 0 \end{cases} \longrightarrow$$



$$x < -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \vee \quad \frac{1}{\sqrt{2}} < x \leq 4$$

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ x < -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \vee \quad \frac{1}{\sqrt{2}} < x \leq 4 \end{cases}$$

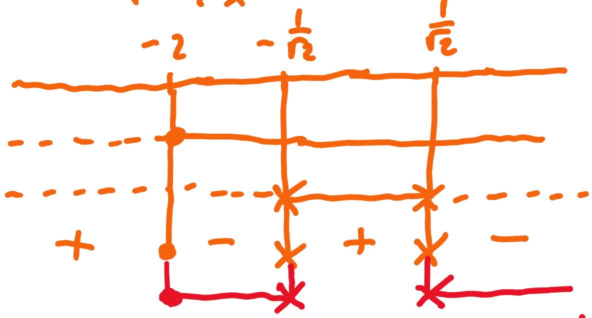


$$1 \leq x \leq 4$$

Soluzioni di ①: $1 \leq x \leq 4$.

$$② \begin{cases} x-1 < 0 \\ \dfrac{-x+1-3}{1-2x^2} \geq 0 \end{cases}$$

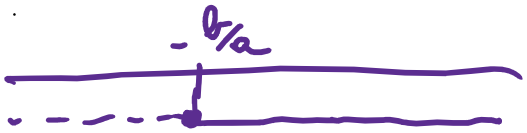
$$\begin{cases} x < 1 \\ \dfrac{-x-2}{1-2x^2} \geq 0 \end{cases} \longrightarrow \quad \frac{x+2}{1-2x^2} \leq 0$$



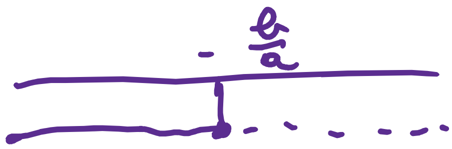
$-2 \leq x < -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \vee \quad x > \frac{1}{\sqrt{2}}$

Nota: Segno di un polinomio di 1° grado $ax+b$.

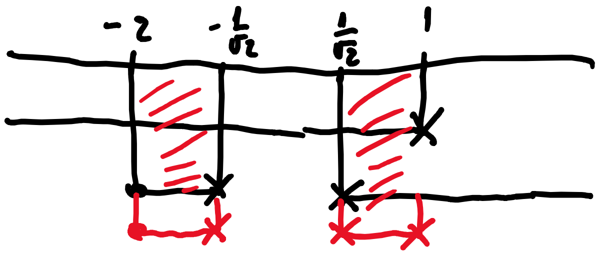
Se $a > 0$:



Se $a < 0$:



$$\begin{cases} x < 1 \\ -2 \leq x < -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \vee \quad x > \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$



Soluzioni di ②: $-2 \leq x < -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \vee \quad \frac{1}{\sqrt{2}} < x < 1$

Conclusione: $-2 \leq x < -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \vee \quad \frac{1}{\sqrt{2}} < x < 1 \quad \vee \quad 1 \leq x \leq 4$

cioè $-2 \leq x < -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \vee \quad \frac{1}{\sqrt{2}} < x \leq 4$.

Intervalli:

Gli INTERVALLI sono insiemi di uno dei seguenti tipi:

1) $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ con $a < b$

INTERVALLO CHIUSO DI ESTREMI a E b.

2) $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ con $a < b$

(o (a, b)) INTERVALLO APERTO DI ESTREMI a E b.

3) $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ $a < b$.

INTERVALLO SEMIAPERTO A SINISTRA DI ESTREMI a E b (O SEMICHIUSO A DESTRA)

4) $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$

INTERVALLO SEMIAPERTO A DESTRA DI ESTREMI a E b (O SEMICHIUSO A SINISTRA)

5) $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$

SEMIRETTA DESTRA CHIUSA DI ESTREMO a

6) $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$

SEMIRETTA DESTRA APERTA DI ESTREMO a

7) $]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$

SEMIRETTA SINISTRA CHIUSA DI ESTREMO a

8) $]-\infty, a[= \{ x \in \mathbb{R} \mid x < a \}$

SEMIRETTA SINISTRA APERTA DI ESTREMO a

9) $\{a\} = [a, a]$ PUNTO

10) $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$ RETTA REALE

11) $\emptyset =]a, b[$ se $b \leq a$

TEOREMA

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$. Allora:

A è un intervallo $\Leftrightarrow$ $\forall x, y \in A$ e $\forall z \in \mathbb{R}$ t.c. $x < z < y$, risulta $z \in A$.

Come gli intervalli, tutti gli insiemi hanno un "estremo destro" e un "estremo sinistro".

$[0, 1]$ 1 è il "massimo" dell'insieme.

$[0, 1[$ $1 \notin [0, 1[$. Quindi 1 non è il più grande elemento di $[0, 1[$

Def: Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme. Sia $a \in \mathbb{R}$, si dice che a è il MASSIMO di A se:

1) $a \in A$
2) $\forall b \in A : a \geq b$.

(si indica con $\max A$)

Def: Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e sia $a \in \mathbb{R}$. Si dice che a è il MINIMO di A se:

1) $a \in A$
2) $\forall\, b \in A: \ a \leq b$.

(Si indica con $\min A$)

Problema: Non sempre $\exists \max A$ e $\min A$.

ESEMPI

$A =]0, 1[\qquad \nexists \max A$ e $\nexists \min A$.

$A = [2, +\infty[\qquad \exists \min A = 2$ ma $\nexists \max A$

$A = \mathbb{N} \qquad \exists \min A = 0$ ma $\nexists \max A$.

Def: Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e sia $a \in \mathbb{R}$. Si dice che a è un MAGGIORANTE per A se $\forall\, b \in A: \ a \geq b$. L'insieme dei maggioranti di A si indica con $\mathcal{M}_A$.

Def: Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme e sia $a \in \mathbb{R}$. Si dice che a è un MINORANTE per A se $\forall\, b \in A: \ a \leq b$.
L'insieme dei minoranti si indica con m_A.

Def: Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme.

1) Si dice che A è SUPERIORMENTE LIMITATO se $\exists$ un maggiorante (cioè $\mathcal{M}_A \neq \emptyset$)

2) Si dice che A è INFERIORMENTE LIMITATO se $\exists$ un minorante. (cioè $m_A \neq \emptyset$)

3) Si dice che A LIMITATO se è limitato sia superiormente che inferiormente ($\mathcal{M}_A \neq \emptyset \wedge m_A \neq \emptyset$).

Def: Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$. Definiamo ESTREMO SUPERIORE DI A la quantità

$$\sup A := \begin{cases} \min \mathcal{M}_A & \text{se } \mathcal{M}_A \neq \emptyset \\ +\infty & \text{se } \mathcal{M}_A = \emptyset \end{cases}$$

Si definisce ESTREMO INFERIORE di A la quantità

$$\inf A := \begin{cases} \max m_A & \text{se } m_A \neq \emptyset \\ -\infty & \text{se } m_A = \emptyset. \end{cases}$$

TEOREMA (DI ESISTENZA DELL' ESTREMO SUP.)

Sia $A \neq \emptyset$, allora $\exists \sup A$.

DIM

Sia $B = \mathcal{M}_A$. Allora $\forall a \in A$ e $\forall b \in B$ $a \leq b$.

Se $B = \emptyset$, $\sup A = +\infty$

se $B \neq \emptyset$, la completezza di $\mathbb{R}$ dice che $\exists c \in \mathbb{R}$ t.c. $\forall a \in A$ e $\forall b \in B$:

$a \leq c \leq b$.

Allora:

1) $\forall a \in A$: $c \geq a$ $\Rightarrow$ $c \in \mathcal{M}_A = B$,

2) $\forall b \in B$: $c \leq b$ $\Rightarrow$ $c = \min B = \min \mathcal{M}_A$.

ESEMPI

1) $A =]-4, 7]$

$\sup A = \max A = 7$

$\inf A = -4$ e $\nexists \min A$.

$\mathcal{M}_A = [7, +\infty[$

$m_A =]-\infty, -4]$

2) $A =]a, b]$ (lo stesso vale per gli altri intervalli di estremi a e b $[a, b]$, $]a, b[$ e $[a, b[$)

$\sup A = b$

$\inf A = a$

$\mathcal{M}_A = [b, +\infty[$

$m_A =]-\infty, a]$

3) $A = \mathbb{N}$.

$\sup A = +\infty$

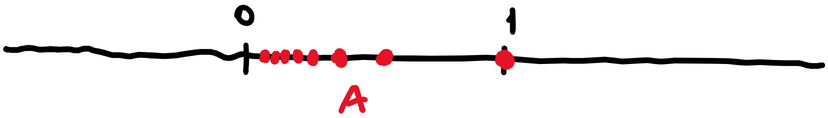
$\inf A = \min A = 0$.

$\mathcal{M}_A = \emptyset$

$m_A =]-\infty, 0]$.

4) $A = \left\{ \frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$

$= \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5} \dots \right\}$



$\sup A = \max A = 1$.

$\inf A = 0$ e $\nexists \min A$.

$\mathcal{M}_A = [1, +\infty[$

$m_A =]-\infty, 0]$

OSS Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$.

1) Se $\exists \max A$, allora $\sup A = \max A$.
2) Se $\exists \min A$, allora $\inf A = \min A$.
3) Se $\sup A \in A$, allora $\exists \max A = \sup A$.
4) Se $\sup A \notin A$, allora $\nexists \max A$.
5) Se $\inf A \in A$, allora $\exists \min A = \inf A$
6) Se $\inf A \notin A$, allora $\nexists \min A$.

Cos'è $\sqrt{2}$?

Def: $\sqrt{2}$ è l'unico numero reale positivo il cui quadrato è 2.

Bisogna però dimostrare che un tale numero esiste.

Idea: Si considera l'insieme:
$A = \{ x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \text{ e } x^2 < 2 \}$
Si dimostra che $\sqrt{2} = \sup A$ cioè che $(\sup A)^2 = 2$.

TEOREMA (DI ESISTENZA DELLE RADICI QUADRATE)

Sia $y \in \mathbb{R}$, $y \geq 0$. Allora $\exists!\, x \in \mathbb{R}$ t.c.

1) $x \geq 0$
2) $x^2 = y$.

Idea $A = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0,\ x^2 \leq y \}$.
$\sqrt{y} = \sup A$.

Def x si dice RADICE QUADRATA di y.
(e si indica con $\sqrt{y}$)

Ricordare

1) $\sqrt{y}$ è definita $\Longleftrightarrow$ $y \geq 0$.

2) $\sqrt{y} \geq 0, \quad \forall\, y \geq 0.$

3) $\sqrt{y} = 0 \iff y = 0$

4) $\sqrt{y} > 0, \quad \forall\, y > 0.$

OSS Per risolvere $x^2 = y$ con $y \in \mathbb{R}$.

- Se $y < 0$, non ci sono soluzioni.
- Se $y = 0$, unica sol. è $x = 0$.
- Se $y \geq 0$, due soluzioni: $x = \pm\sqrt{y}$.

$$
\begin{aligned}
x^2 = y \quad &\iff x^2 = (\sqrt{y})^2 \\
&\iff x^2 - (\sqrt{y})^2 = 0 \\
&\iff (x - \sqrt{y})(x + \sqrt{y}) = 0 \\
&\iff x - \sqrt{y} = 0 \quad \vee \quad x + \sqrt{y} = 0 \\
&\iff x = \sqrt{y} \quad \vee \quad x = -\sqrt{y}.
\end{aligned}
$$

TEOREMA (DI ESISTENZA DELLA RADICE N-ESIMA)

Sia $y \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

1) Se n è pari e $\boxed{y \geq 0}$, allora $\exists!\ x \in \mathbb{R}$ t.c. $x \geq 0$ e $x^n = y$.

2) Se n è dispari, allora $\exists!\ x$ t.c. $x^n = y$ (e x e y hanno lo stesso segno).

Def: In entrambi i casi, x è detto **RADICE n-ESIMA** di y e si indica con $\sqrt[n]{y}$.

ESEMPI

- $\sqrt[3]{8} = 2$
- $\sqrt[4]{81} = 3$
- $\sqrt[5]{-32} = -2 \qquad ((-2)^5 = -2^5 = -32)$
- $\sqrt[4]{-16} \nexists$ (in $\mathbb{R}$).

Ricordare

1) Se n è pari: $\sqrt[n]{y}$ è definito solo per $y \geq 0$ e $\sqrt[n]{y} \geq 0$.

2) Se n è dispari $\sqrt[n]{y}$ è sempre definito e $\sqrt[n]{y}$ ha sempre lo stesso segno di y.

3) $\sqrt[n]{y} = 0 \iff y = 0.$

4) $\sqrt[n]{y} > 0 \iff y > 0.$

vero sia per n pari che per n dispari.

$$\sqrt[n]{x^n} = ?$$ (non sempre la risposta è x)

$$\sqrt[4]{(-2)^4} = \sqrt[4]{16} = 2.$$

OSS

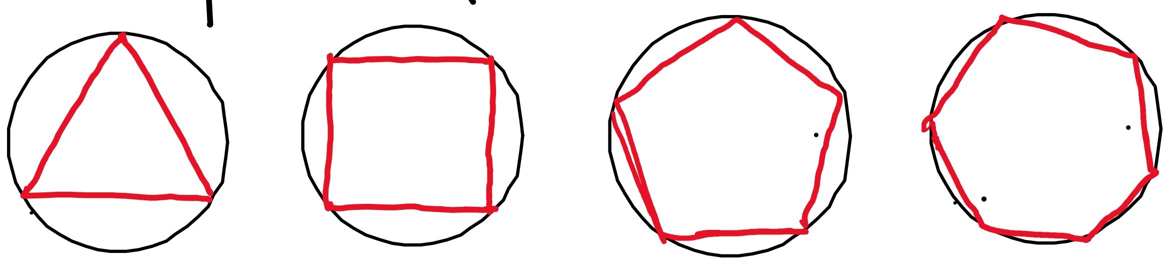
1) Se n è dispari: $\forall x \in \mathbb{R}$ $\sqrt[n]{x^n} = x$.

2) Se n è pari: $\sqrt[n]{x^n} = |x|$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

$$x^2 = 4$$
$$\sqrt{x^2} = \sqrt{4}$$
$$|x| = 2$$
$$x = \pm 2.$$

I concetti di sup e inf si usano anche per definire altri numeri come π ed e.

Cos'è π?
è il rapporto tra la lunghezza di una circonferenza e il suo diametro
Ma, cos'è la lunghezza di una circonferenza?



Sia P_n il perimetro del poligono

regolare con n lati inscritto
nella circonferenza di raggio 1.

La LUNGHEZZA DELLA CIRCONFERENZA DI RAGGIO 1 È

$$L := \sup \{ P_n \mid n \in \mathbb{N},\ n \geq 3 \}$$

Quindi: $\pi = \frac{L}{2}$

NUMERO DI NEPERO (O NUMERO DI EULERO)

$$e := \sup \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$$

Viene introdotto per risolvere un problema di matematica finanziaria.

Sia C un capitale (una somma di denaro da investire)
Se dopo un anno il capitale raddoppia, alla fine dell'anno il capitale finale C_{FIN} è uguale a:

$$C_{FIN} = 2C = C(1+1) = C\left(1 + \frac{1}{1}\right)^1$$

Raddoppiare significa aumentare del 100%.

Domanda:

È meglio aumentare del 100% dopo

un anno o aumentare del 50% ogni 6 mesi ?

Dopo 6 mesi il capitale è:

$$C_1 = C + \frac{1}{2} C = C\left(1+\frac{1}{2}\right)$$

Dopo 1 anno:

$$C_{FIN} = C_1 + \frac{1}{2} C_1 = C_1\left(1+\frac{1}{2}\right)$$

$$= C\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)$$

$$= C\underbrace{\left(1+\frac{1}{2}\right)^2}_{>2}$$

- Se dividiamo un anno in n intervalli di tempo uguali e ad ogni intervallo aumenta di $\frac{1}{n} \cdot 100\%$ il capitale finale è uguale a $C_{FIN} = C\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$