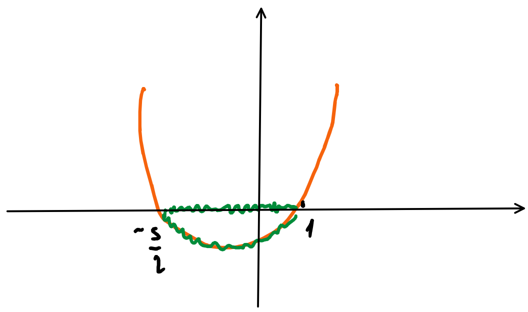
- $2x^2 + 3x - 5 < 0$

$\Delta = 9 + 40 = 49$

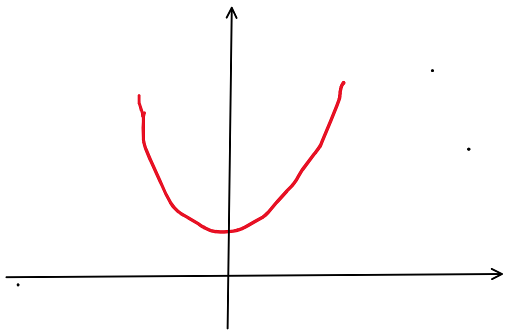
$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm 7}{4} = \begin{cases} 1 \\ -\frac{5}{2} \end{cases}$$

$$-\frac{5}{2} < x < 1$$




- $x^2 + 1 \geq 0$

Vero $\forall x \in \mathbb{R}$.



- Considerazioni finali sui polinomi

1) Il grado di un polinomio (non nullo) si indica con $\deg p$

2) $\deg(p_1 p_2) = \deg p_1 + \deg p_2$

3) I polinomi si possono sommare/sottrarre e moltiplicare tra loro. Inoltre tra due polinomi si può fare la divisione con resto.

TEOREMA

Siano $a(x)$, $b(x)$ due polinomi con $b(x)$ non nullo. Allora $\exists!$ $q(x)$, $r(x)$ polinomi tali che:

1) $a(x) = b(x)\, q(x) + r(x)$ e
2) $r(x) = 0$ oppure $\deg(r) < \deg b$.

Come si trovano $r(x)$ e $q(x)$?

ESEMPIO

$a(x) = x^5 + x^3 + x + 1$

$b(x) = x^3 + 2$

$$
\begin{array}{cccccccccccc|l}
x^5 & + & 0\cdot x^4 & + & x^3 & + & 0\cdot x^2 & + & x & + & 1 & & x^3 + 2 \\
\cline{13-13}
x^5 & + & & & & + & 2x^2 & & & & & & x^2 + 1 \\
\hline
\backslash & & \backslash & & x^3 & - & 2x^2 & + & x & + & 1 & & \\
 & & & & x^3 & & & & & + & 2 & & \\
\cline{5-11}
 & & & & \backslash & - & 2x^2 & + & x & - & 1 & &
\end{array}
$$

Quindi $\quad r(x) = -2x^2 + x - 1$

$\qquad\quad\ q(x) = x^2 + 1$

Si può verificare che $a(x) = b(x)\,q(x) + r(x)$.

$$
\begin{aligned}
b(x)\,q(x) + r(x) &= (x^3+2)(x^2+1) - 2x^2 + x - 1 \\
&= x^5 + \cancel{2x^2} + x^3 + 2 - \cancel{2x^2} + x - 1 \\
&= x^5 + x^3 + x + 1
\end{aligned}
$$

OSS Il procedimento che abbiamo appena visto richiede che $\deg a \geq \deg b$. Se invece $\deg a < \deg b$ si può subito concludere che $q(x) = 0$ e $r(x) = a(x)$.

4) Nel caso particolare in cui $b(x) = x - \alpha$ con $\alpha \in \mathbb{R}$, la divisione tra un polinomio $a(x)$ e e $b(x) = x - \alpha$ si può fare utilizzando la regola di Ruffini.

5) Attenzione ai segni quando si moltiplicano delle disequazioni per polinomi.

ESEMPIO

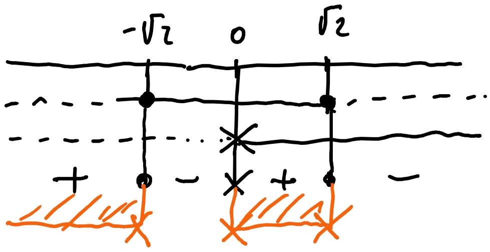
$$\frac{x+2}{x} > x+1$$

(non si può moltiplicare per $x$)

$$\frac{x+2}{x} - x - 1 > 0$$

$$\frac{\cancel{x}+2-x^2-\cancel{x}}{x} > 0$$

$$\frac{2-x^2}{x} > 0$$




Soluzioni:

$x < -\sqrt{2} \ \lor \ 0 < x < \sqrt{2}$.

- $$\frac{2x}{x^2+1} > 1$$

Diversamente dall'esempio precedente, qui si può moltiplicare per $x^2+1$ perché $x^2+1>0$

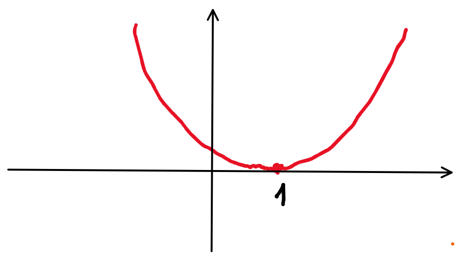
$$2x > x^2+1$$

$$x^2+1-2x < 0$$

$$x^2-2x+1 < 0$$

$$(x-1)^2 < 0$$

$\nexists$ soluzioni.




---

## Sistemi di disequazioni (in una variabile).

$$\begin{cases} \text{disequazione } ① \\ \text{disequazione } ② \\ \vdots \end{cases}$$

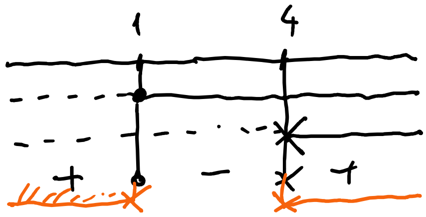
## Per risolverle:

Si risolvono le singole disequazioni e poi si intersecano gli insiemi delle soluzioni.

ESEMPIO

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{x-4} > 0 & ① \\ 2 - x > 0 & ② \end{cases}$$

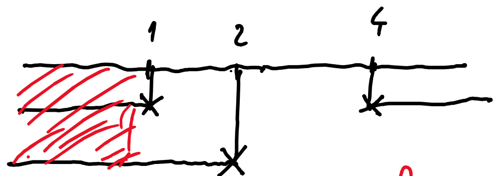
① $\dfrac{x-1}{x-4} > 0$




$x < 1 \quad \vee \quad x > 4$

② $2 - x > 0 \iff x < 2$

$$\begin{cases} x < 1 \quad \vee \quad x > 4 \\ x < 2 \end{cases}$$



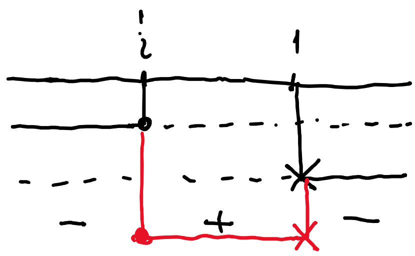

Intersezione delle soluzioni
$x < 1$

Soluzioni del sistema : $x < 1$

ESEMPIO

$$\begin{cases} \dfrac{1-2x}{x-1} \geq 0 & ① \\ x^2 \geq 4 & ② \end{cases}$$

①




Soluzioni di ①:
$\frac{1}{2} \leq x < 1.$

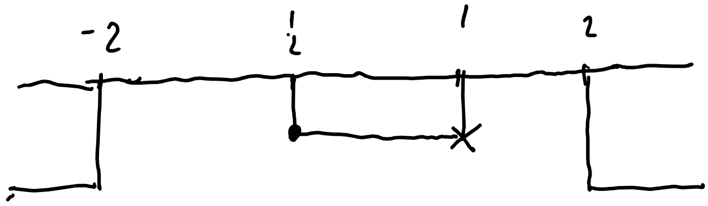
② $x^2 \geq 4$

$x^2 - 4 \geq 0$

$x \geq 2 \quad \vee \quad x \leq -2$

Risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ x \geq 2 \quad \vee \quad x \leq -2 \end{cases}$$



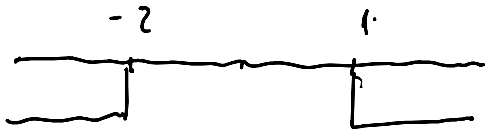

Il sistema non ha soluzioni.

(gli insiemi delle soluzioni di ① e ② non hanno punti in comune, quindi la loro intersezione è vuota)

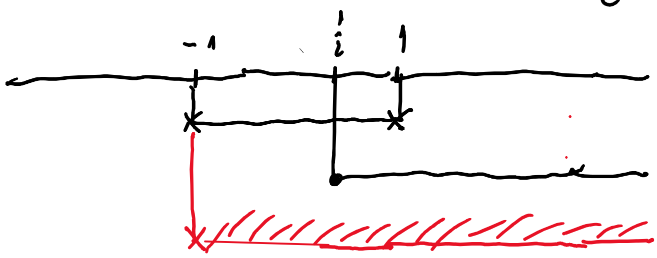
---

## Unioni di soluzioni

- $x > 1 \quad \vee \quad x < -2$



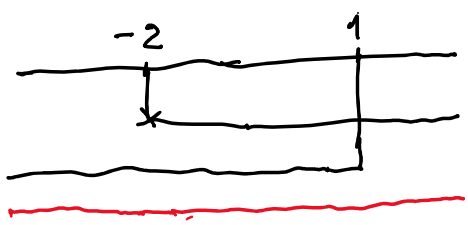

- $x^2 - 1 < 0 \quad \vee \quad x \geq \frac{1}{2}$




Unione delle soluzioni: $x > -1$.

- $x < 1 \quad \vee \quad x > -2$

Vero $\forall x \in \mathbb{R}$.




---

## Sistemi misti

$$\begin{cases} \text{equazione} \\ \text{disequazione} \quad (1) \\ \text{disequazione} \quad (2) \\ \vdots \end{cases}$$

Per risolverli:

Basta risolvere l'equazione e verificare se i valori trovati risolvono anche tutte le disequazioni presenti nel sistema.

$$\begin{cases} x^2 + 4x - 5 = 0 \quad (*) \\ x^2 - 1 > 0 \end{cases}$$

$x^2 + 4x - 5 = 0 \qquad x_{1,2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4+5}}{1} = \begin{cases} 1 \\ -5 \end{cases}$

$$\begin{cases} x = 1 \quad \vee \quad x - 5 \\ x^2 - 1 > 0 \end{cases}$$

Sostituiamo i due valori trovati nella disequazione:

$1^2 - 1 = 0 > 0$ FALSO ✗

$(-5)^2 - 1 = 24 > 0$ VERO ✓

$x = -5$ è l'unica soluzione del sistema.

---

## Valore assoluto

**Def** Sia $a \in \mathbb{R}$, si definisce VALORE ASSOLUTO di $a$ la quantità $|a| := \begin{cases} a & \text{se } a \geq 0 \\ -a & \text{se } a < 0 \end{cases}$

$|-2| = 2$

$|-15| = 15$

$|7| = 7$

$|-\pi| = \pi$

$|0| = 0$

PROPRIETÀ

1) $\forall x \in \mathbb{R}: \quad |x| \geq 0.$

2) $\forall x \in \mathbb{R}: \quad |x| = 0 \iff x = 0$

3) $\forall x, y \in \mathbb{R}: \quad |xy| = |x|\,|y|$ e

se $y \neq 0$: $\quad \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$

4) $\forall x, y \in \mathbb{R}: \quad |x+y| \leq |x| + |y|$ (DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE)

5) $\forall x, y \in \mathbb{R}: \quad |x-y| \leq |x| + |y|$

6) $\forall x, y \in \mathbb{R}: \quad \big||x| - |y|\big| \leq |x-y|$

7) $\forall x, y \in \mathbb{R}: \quad |x| = |y| \iff x = y \lor x = -y.$

8) $\forall x, y \in \mathbb{R}: \quad |x| \underset{<}{\leq} y \iff -y \underset{<}{\leq} x \underset{<}{\leq} y \iff \begin{cases} x \overset{<}{\leq} y \\ x \underset{>}{\geq} -y \end{cases}$

9) $\forall x, y \in \mathbb{R}: \quad |x| \underset{>}{\geq} y \iff x \underset{>}{\geq} y \lor x \underset{<}{\leq} -y$

Vogliamo risolvere equazioni e disequazioni in cui compare (almeno) un valore assoluto.

Tipo più semplice:

$|a(x)| = b(x) \;/\; |a(x)| \leq b(x) \;/\; |a(x)| \geq b(x)$

$|a(x)| < b(x) \;/\; |a(x)| > b(x)$

## Metodo

$$|a(x)| = \begin{cases} a(x) & \text{se } a(x) \geq 0 \\ -a(x) & \text{se } a(x) < 0 \end{cases}$$

Quindi

$$\boxed{|a(x)| = b(x) \iff \begin{cases} a(x) \geq 0 \\ a(x) = b(x) \end{cases} \vee \begin{cases} a(x) < 0 \\ -a(x) = b(x) \end{cases}}$$

Lo stesso metodo funziona anche per tutte le disequazioni

## Metodo per le disequazioni

$$|a(x)| \geq b(x) \iff \begin{cases} a(x) \geq 0 \\ a(x) \geq b(x) \end{cases} \vee \begin{cases} a(x) < 0 \\ -a(x) \geq b(x) \end{cases}$$

$$|a(x)| \leq b(x) \iff \begin{cases} a(x) \geq 0 \\ a(x) \leq b(x) \end{cases} \vee \begin{cases} a(x) < 0 \\ -a(x) \leq b(x) \end{cases}$$

$$|a(x)| > b(x) \iff \begin{cases} a(x) \geq 0 \\ a(x) > b(x) \end{cases} \vee \begin{cases} a(x) < 0 \\ -a(x) > b(x) \end{cases}$$

$$|a(x)| < b(x) \iff \begin{cases} a(x) \geq 0 \\ a(x) < b(x) \end{cases} \vee \begin{cases} a(x) < 0 \\ -a(x) < b(x) \end{cases}$$

### ESEMPIO 1

$$|6x - 1| = 10 - 9x$$

$$1 \begin{cases} 6x - 1 \geq 0 \\ 6x - 1 = 10 - 9x \end{cases} \vee \begin{cases} 6x - 1 < 0 \\ -6x + 1 = 10 - 9x \end{cases} 2$$

① equazione:

$$6x - 1 = 10 - 9x$$
$$15x = 11$$
$$x = \frac{11}{15}$$

$$\begin{cases} 6x - 1 \geq 0 \\ x = \frac{11}{15} \end{cases} \qquad 6 \cdot \frac{11}{15} - 1 = \frac{22}{5} - 1 = \frac{17}{5} \geq 0 \quad ✓$$

$x = \frac{11}{15}$ è l'unica soluzione di ①

② $$\begin{cases} 6x - 1 < 0 \\ -6x + 1 = 10 - 9x \end{cases}$$

$$-6x + 1 = 10 - 9x$$
$$3x = 9$$
$$x = 3$$

$$\begin{cases} 6x - 1 < 0 \\ x = 3 \end{cases} \quad ✗ \qquad 6 \cdot 3 - 1 = 17 \not< 0$$

Il secondo sistema non ha soluzioni.

<u>Conclusione</u>: Unica soluzione dell'equazione iniziale è $x = \frac{11}{15}$

<u>ESEMPIO</u> 2

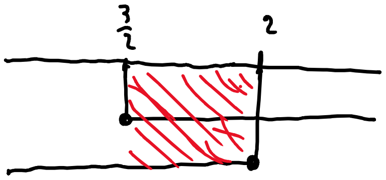
$$x - |2x - 3| \geq 1$$

① $$\begin{cases} 2x - 3 \geq 0 \\ x - (2x - 3) \geq 1 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} 2x - 3 < 0 \\ x - (-2x + 3) \geq 1 \end{cases}$$ ②

① $$\begin{cases} 2x - 3 \geq 0 \\ x - 2x + 3 \geq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq \frac{3}{2} \\ -x \geq -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq \frac{3}{2} \\ x \leq 2 \end{cases}$$



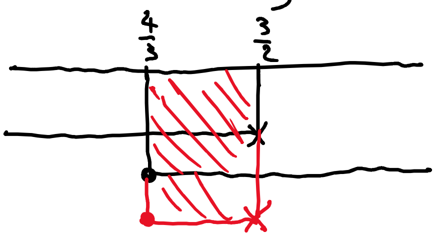

Soluzioni di ①: $\frac{3}{2} \leq x \leq 2$

② $$\begin{cases} 2x - 3 < 0 \\ x - (-2x+3) \geq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < \frac{3}{2} \\ x + 2x - 3 \geq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < \frac{3}{2} \\ 3x \geq 4 \end{cases}$$

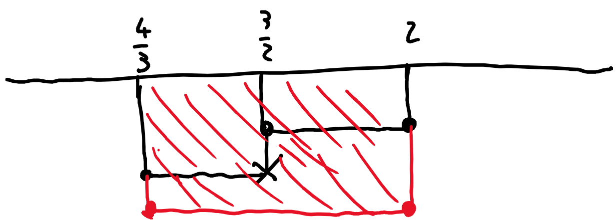
$$\begin{cases} x < \frac{3}{2} \\ x \geq \frac{4}{3} \end{cases}$$




Soluzioni di ②

$\frac{4}{3} \leq x < \frac{3}{2}$

Conclusione: $\frac{3}{2} \leq x \leq 2 \quad \vee \quad \frac{4}{3} \leq x < \frac{3}{2}$




Soluzioni dell'equazione iniziale: $\frac{4}{3} \leq x \leq 2$.

## Metodo alternativo

- $|a(x)| \le b(x) \iff -b(x) \le a(x) \le b(x)$

$$\iff \begin{cases} a(x) \le b(x) \\ a(x) \ge -b(x) \end{cases}$$

- $|a(x)| \ge b(x) \iff a(x) \ge b(x) \quad \vee \quad a(x) \le -b(x)$

In modo simile, per le disuguaglianze strette:

- $|a(x)| < b(x) \iff -b(x) < a(x) < b(x)$

$$\iff \begin{cases} a(x) < b(x) \\ a(x) > -b(x) \end{cases}$$

- $|a(x)| > b(x) \iff a(x) > b(x) \quad \vee \quad a(x) < -b(x)$

ESEMPIO

$$x - |2x-3| \ge 1$$

$$-|2x-3| \ge 1 - x$$

$$|2x-3| \le -1 + x$$

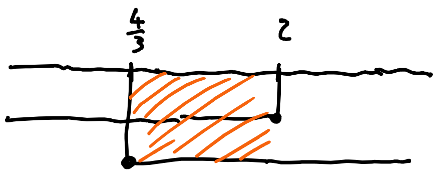
$$x - 1 \ge |2x-3|$$

$$|2x-3| \le x - 1$$

$$\begin{cases} 2x-3 \le x-1 \\ 2x-3 \ge -x+1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \le 2 \\ 3x \ge 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \le 2 \\ x \ge \frac{4}{3} \end{cases}$$




Soluzioni: $\frac{4}{3} \le x \le 2$.

Vantaggio del secondo metodo: Più rapido.

Svantaggi: • Più difficile da ricordare

- Si applica solo a disequazioni del tipo

$|a(x)| \leq b(x)$ / $|a(x)| \geq b(x)$ / $|a(x)| > b(x)$ / $|a(x)| > b(x)$

- Non funziona per le equazioni

$$|a(x)| = b(x) \;\cancel{\Leftrightarrow}\; a(x) = b(x) \vee a(x) = -b(x)$$

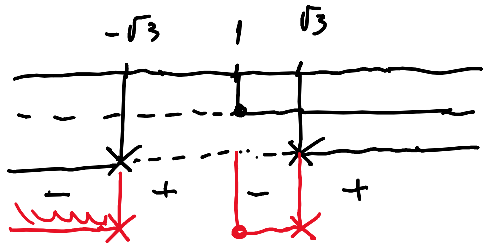
ESERCIZIO DI ESAME

Risolvere:
$$\frac{|3x-2| - 1}{x^2-3} \leq 0$$

Equivale a:

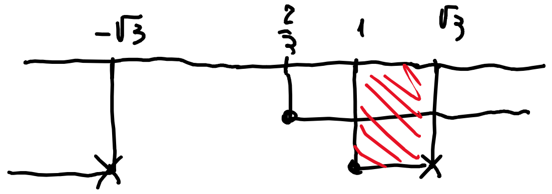
$$① \begin{cases} 3x-2 \geq 0 \\ \dfrac{3x-2-1}{x^2-3} \leq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 3x-2 < 0 \\ \dfrac{-3x+2-1}{x^2-3} \leq 0 \end{cases} ②$$

$$① \begin{cases} x \geq \frac{2}{3} \\ \dfrac{3x-3}{x^2-3} \leq 0 \end{cases} \longrightarrow$$




$x < -\sqrt{3} \vee 1 \leq x < \sqrt{3}$

$$\begin{cases} x \geq \frac{2}{3} \\ x < -\sqrt{3} \vee 1 \leq x \leq \sqrt{3} \end{cases}$$



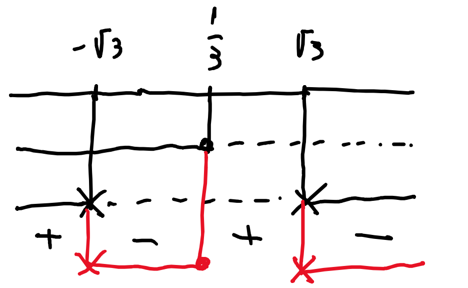

Sol di ①:

$1 \leq x < \sqrt{3}$

②

$$\begin{cases} 3x - 2 < 0 \\ \dfrac{-3x+2-1}{x^2-3} \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < \dfrac{2}{3} \\ \dfrac{1-3x}{x^2-3} \leq 0 \end{cases} \longrightarrow$$




$-\sqrt{3} < x \leq \frac{1}{3} \quad \vee \quad x > \sqrt{3}$

$$\begin{cases} x < \dfrac{2}{3} \\ -\sqrt{3} < x \leq \dfrac{1}{3} \quad \vee \quad x > \sqrt{3} \end{cases}$$

$$-\sqrt{3} < x \leq \frac{1}{3}$$

<u>Soluzione finale</u>: $-\sqrt{3} < x \leq \frac{1}{3} \quad \vee \quad 1 \leq x < \sqrt{3}$