MATEMATICA - LEZIONE 4

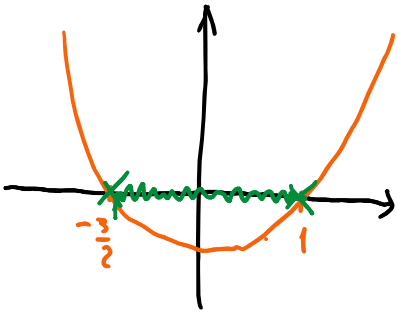
venerdì 3 ottobre 2025 11:02

ESERCIZI

1) $\overset{>0}{2}x^2 + x - 3 < 0$

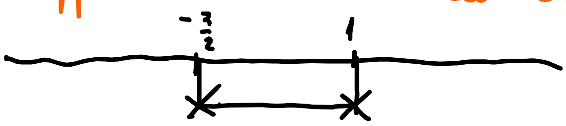
$\Delta = 1 + 24 = 25$

$x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm 5}{4} = \begin{cases} 1 \\ -\frac{3}{2} \end{cases}$

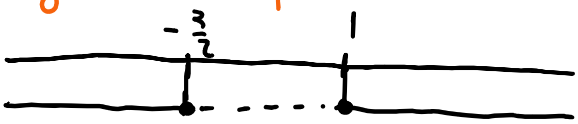


Soluzioni: $-\frac{3}{2} < x < 1$

Rappresentazione delle soluzioni:



Segno del polinomio $2x^2 + x - 3$



Attenzione a non confondere le due rappresentazioni

2) $x^2 + 6x + 9 \leq 0$

$\Delta = 36 - 36 = 0$

$x = \dfrac{-6}{2} = -3$

Unica soluzione della disequazione è $x = -3$

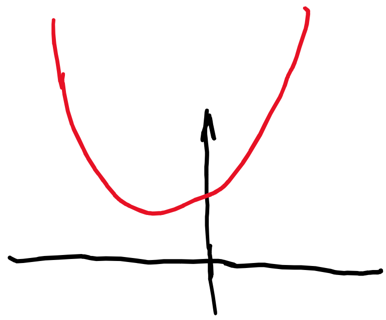
3) $x^2 + 6x + 9 \geq 0$

Vera $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

4) $10x^2 + 2x + 4 \le 0$

$\Delta = 4 - 160 < 0$

La disequazione non ha soluzioni.



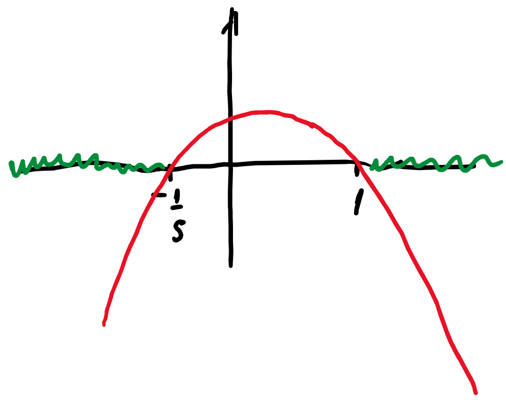
5) $1 + 4x - 5x^2 \le 0$

$-5x^2 + 4x + 1 \le 0$

$\Delta = 16 + 20 = 36$

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{36}}{-10} = \begin{cases} 1 \\ -\frac{1}{5} \end{cases}$$

$x \le -\frac{1}{5} \quad \vee \quad x \ge 1.$



Metodo alternativo: cambiare il segno

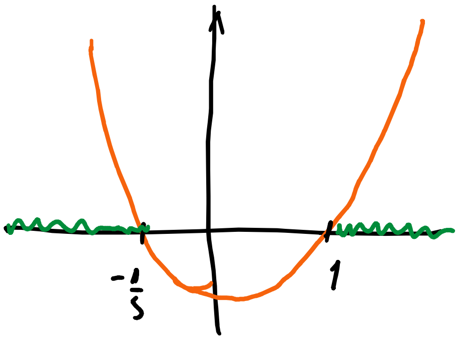
$-5x^2 + 4x + 1 \le 0$

$5x^2 - 4x - 1 \ge 0$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{36}}{10} = \begin{cases} 1 \\ -\frac{1}{5} \end{cases}$$

Soluzioni:

$x \le -\frac{1}{5} \quad \vee \quad x \ge 1.$



Equazioni di secondo grado non complete

- $ax^2 + bx = 0$

$x(ax+b) = 0$

$\iff x = 0 \vee ax + b = 0$

$\iff x = 0 \vee x = -\frac{b}{a}$

- $a x^2 + c = 0$ (con $a \neq 0$)

$$x^2 = -\frac{c}{a} \quad \begin{cases} >0 & x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}} \quad (\Delta > 0) \\ =0 & x = 0 \quad (\Delta = 0) \\ <0 & \nexists \text{ soluzioni} \quad (\Delta < 0) \end{cases}$$

Osservazioni sui polinomi di secondo grado

OSS Siano $a, b, c \in \mathbb{R}$.

1) $$a x^2 + b x + c = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right)$$
$$= a\left(\underbrace{x + \frac{b}{2a}}\right)^2 \underbrace{- \frac{\Delta}{4a}}$$

Il vertice della parabola è il punto $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$

2) Se $\Delta > 0$ e x_1 e x_2 sono le due radici di $a x^2 + b x + c$.
Allora
$$a x^2 + b x + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

3) Se $\Delta > 0$, $$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{\Delta}{4}}}{a}$$
$$= \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}}{a}$$ (FORMULA RIDOTTA)

4) Se $\Delta = 0$, $\quad ax^2+bx+c = a(x-x_0)^2$

dove $x_0 = -\frac{b}{2a}$ è l'unica radice del polinomio.

Se $a > 0$, allora

$$ax^2+bx+c = (\sqrt{a}\,x - \sqrt{a}\,x_0)^2$$

Se $a < 0$:

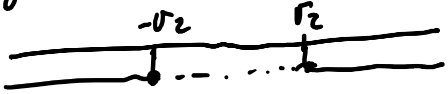
$$ax^2+bx+c = -(\sqrt{|a|}\,x - \sqrt{|a|}\,x_0)^2$$

Equazioni e disequazioni con prodotti tra polinomi

ESERCIZIO

$$x\,(x^2-2)(2x^2-5x-3) \geq 0 .$$

$x^2-2=0 \iff x = \pm\sqrt{2}$ Segno di x^2-2

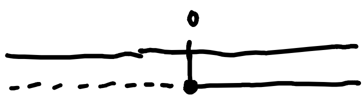


$2x^2-5x-3$

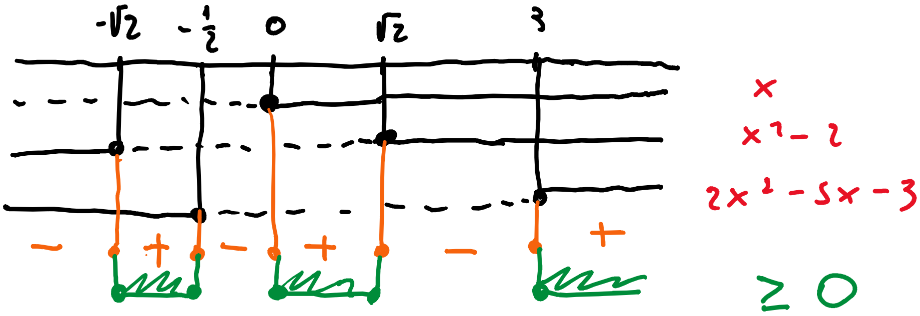
$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25+24}}{4} \begin{cases} 3 \\ \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Segno:

Segno di x:



Segno del prodotto

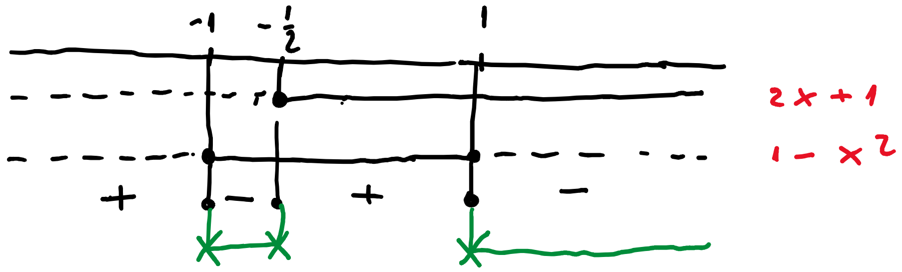


Soluzioni :

$-\sqrt{2} \le x \le -\frac{1}{2} \quad \vee \quad 0 \le x \le \sqrt{2} \quad \vee \quad x \ge 3$

ESEMPIO

$$(2x+1)(1-x^2) < 0$$

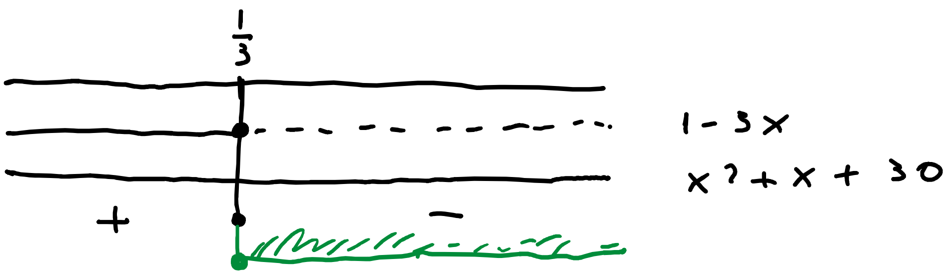


Soluzioni : $-1 < x < -\frac{1}{2} \quad \vee \quad x > 1.$

ESEMPIO

$$(1-3x)(\underbrace{x^2+x+30}) \le 0$$

$\Delta = 1 - 120 = -119 < 0$



Soluzioni : $x \ge \frac{1}{3}$

Sia $p(x)$ un polinomio di grado ≥ 3.
Per risolvere equazioni e disequazioni del tipo
$p(x) = 0$ / $p(x) \ge 0$ / $p(x) \le 0$ / $p(x) > 0$ / $p(x) < 0$
si può provare a FATTORIZZARE il polinomio

cioè scriverlo come prodotto di polinomi di grado 1 o 2.

TEOREMA DI FATTORIZZAZIONE

Ogni polinomio a coefficienti reali di grado ≥ 3 può essere scritto come prodotto di polinomi di grado 1 o 2.

ESEMPIO

$$x^3 + x - 2 = 0$$

Osserviamo che $x = 1$ è una soluzione.
Dividiamo il polinomio $x^3 + x - 2$ per $x - 1$ utilizzando la **REGOLA DI RUFFINI**

$$x^3 + x - 2 = x^3 + 0 \cdot x^2 + x - 2$$

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 0 & 1 & -2 \\ & & + & & \\ 1 & & 1 & 1 & 2 \\ \hline & 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}$$

$$x^3 + x - 2 = (x-1)(x^2 + x + 2)$$

$$x^3 + x - 2 = 0$$

$$(x-1)(x^2+x+2) = 0$$

$$x - 1 = 0 \quad \vee \quad \underbrace{x^2 + x + 2}_{\Delta = 1 - 8 = -7 < 0} = 0 \ (\text{imp.})$$

$$x = 1$$

$x = 1$ è l'unica soluzione.

ESEMPIO

$$3x^3 - 13x^2 - 8x + 4 \geq 0$$

Fattorizziamo il polinomio:

Sia $p(x) = 3x^3 - 13x^2 - 8x + 4$

$$p\left(\tfrac{1}{3}\right) = 3 \cdot \frac{1}{27} - 13 \cdot \frac{1}{9} - \frac{8}{3} + 4$$

$$= \underbrace{\frac{1}{9} - \frac{13}{9}}_{-\frac{12}{9} = -\frac{4}{3}} - \frac{8}{3} + 4 = -\frac{4}{3} - \frac{8}{3} + 4 = 0$$

Ruffini:

	3	−13	−8	4
$\frac{1}{3}$		1	−4	−4
	3	−12	−12	0

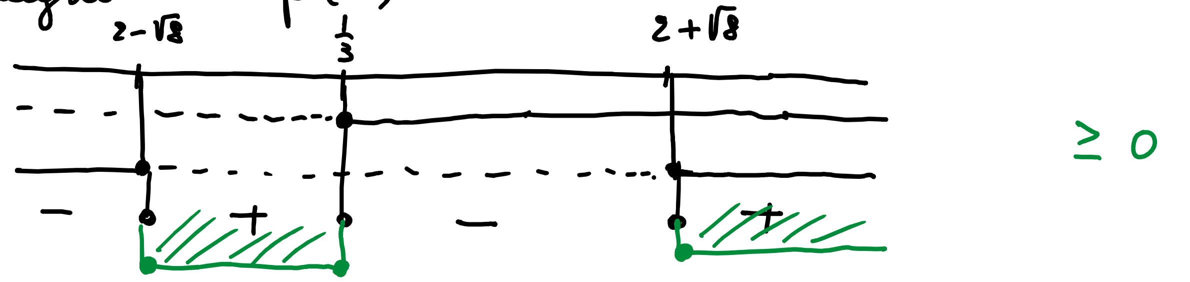
$$p(x) = \left(x - \tfrac{1}{3}\right)\left(3x^2 - 12x - 12\right)$$

$$= 3\left(x - \tfrac{1}{3}\right)\left(\underline{x^2 - 4x - 4}\right)$$

$$\frac{\Delta}{4} = 4 + 4 = 8 > 0$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{1} = 2 \pm \sqrt{8}$$

Segno di $p(x)$:



Soluzioni: $2-\sqrt{8} \leq x \leq \frac{1}{3} \quad \vee \quad x \geq 2+\sqrt{8}$

Regola: Sia $p(x) = a_n x^n + \ldots\ldots + a_1 x + a_0$ un polinomio con $a_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ e $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$. Se q è una radice razionale di $p(x)$, allora $q = \frac{a}{b}$ dove $a \in \mathbb{Z}$ è un divisore di a_0 e $b \in \mathbb{Z}$ è un divisore di a_n.

$$3x^3 - 13x^2 - 8x + 4$$

- I divisori di 4 sono: $\pm 1, \pm 2, \pm 4$
- I divisori di 3 sono: $\pm 1, \pm 3$.

Le radici razionali del polinomio vanno cercate tra:

$$\pm 1 \quad \pm 2 \quad \pm 4 \quad \pm \frac{1}{3} \quad \pm \frac{2}{3} \quad \pm \frac{4}{3}$$

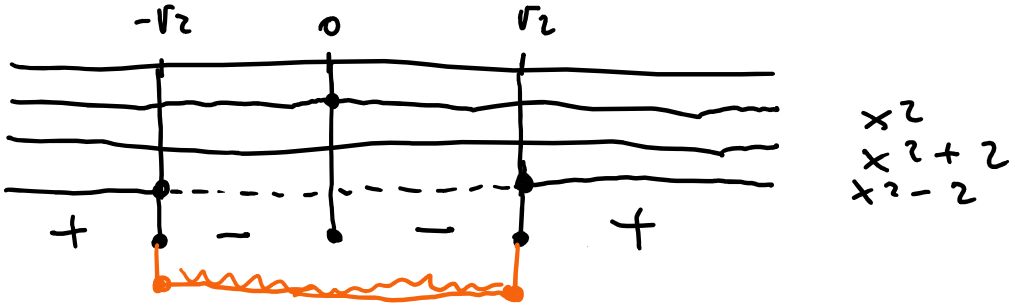
Non sempre, la regola di Ruffini è il modo più rapido per risolvere equazioni e disequazioni.

ESEMPIO

$$x^6 - 4x^2 \leq 0$$

$$\begin{aligned} x^6 - 4x^2 &= x^2(x^4 - 4) \\ &= x^2((x^2)^2 - 2^2) \\ &= x^2(x^2+2)(x^2-2) \end{aligned}$$

$$= x^2(x^2+2)(x^2-2)$$

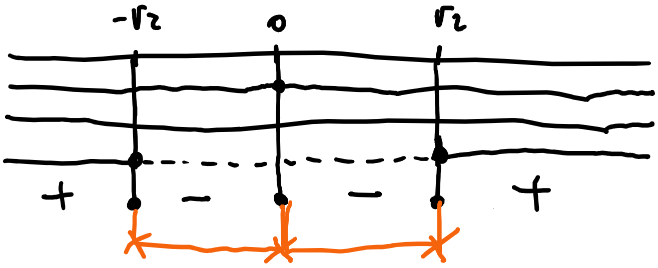


Soluzioni: $-\sqrt{2} \le x \le \sqrt{2}$

Nota

$$x^6 - 4x^2 < 0$$

$-\sqrt{2} < x < 0 \quad \vee \quad 0 < x < \sqrt{2}$



Gli stessi metodi visti per i polinomi si usano per risolvere EQUAZIONI E DISEQUAZIONI RAZIONALI (o RAZIONALI FRATTE) cioè in cui l'incognita x compare all'interno di rapporti tra polinomi.

Queste equazioni/disequazioni sono riconducibili a espressioni del tipo

$$\frac{p(x)}{q(x)} = 0 \Big/ \frac{p(x)}{q(x)} \ge 0 \Big/ \frac{p(x)}{q(x)} \le 0 \Big/ \frac{p(x)}{q(x)} > 0 \Big/ \frac{p(x)}{q(x)} < 0$$

con p e q polinomi

ESEMPIO:

$$\frac{x^2+3x-4}{2x+1} < 0$$

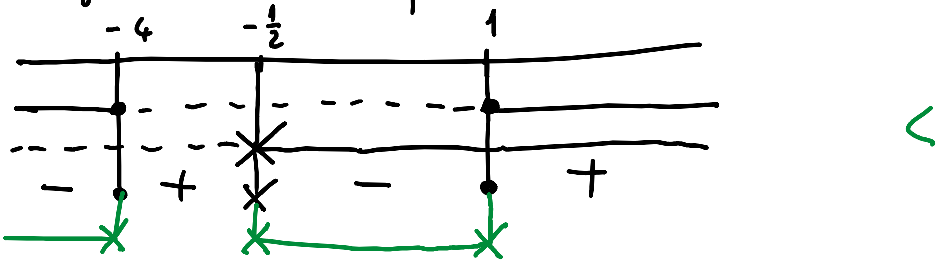
Si risolve studiando il segno di numeratore e denominatore, ricordando che il denominatore non può essere 0.

Numeratore: x^2+3x-4

$\Delta = 9+16 = 25$

$x_{1,2} = \frac{-3\pm 5}{2} = \begin{cases} 1 \\ -4 \end{cases}$

Segno della frazione:



Soluzioni: $x<-4 \quad \vee \quad -\frac{1}{2} < x < 1.$

Attenzione

- $\frac{1}{x-1} = 1$ c.e $x \neq 1$.

$$1 = x - 1$$
$$x = 2$$

(si può moltiplicare per $x-1$ perché $x-1 \neq 0$)

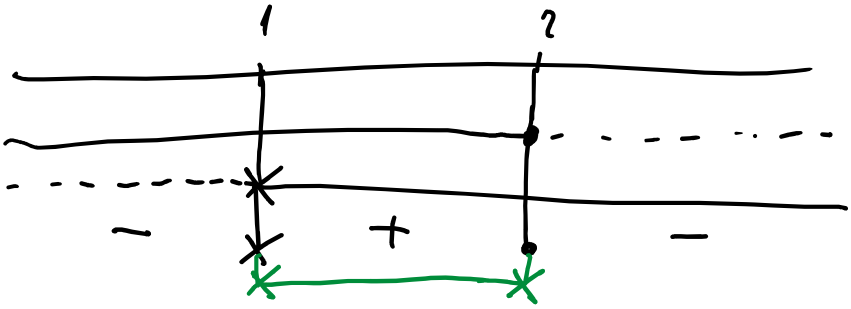
- $$\frac{1}{x-1} > 1$$

(NON si può moltiplicare per $x-1$ perché nelle disequazioni si può moltiplicare solo per numeri positivi)

$$\frac{1}{x-1} - 1 > 0$$

$$\frac{1-(x-1)}{x-1} > 0$$

$$\frac{2-x}{x-1} > 0$$



Soluzioni: $1 < x < 2$.

Ricordare

- $$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p_2(x)}{q_2(x)} \iff q_2(x)\,p(x) = q(x)\,p_2(x) \wedge q(x) \neq 0 \wedge q_2(x) \neq 0.$$

- $$\frac{p(x)}{q(x)} \leq \frac{p_2(x)}{q_2(x)} \iff \frac{p(x)}{q(x)} - \frac{p_2(x)}{q_2(x)} \leq 0$$

$$\iff \frac{p(x)\,q_2(x) - q(x)\,p_2(x)}{q(x)\,q_2(x)} \leq 0.$$