MATEMATICA - LEZIONE 1

domenica 28 settembre 2025 13:51

Docenti:

Titolare del corso:
Gabriele Mancini
gabriele.mancini@uniba.it
Ufficio: Dipartimento di Matematica, secondo piano, stanza 30

Ricevimento: lunedì 14:30 - 16:30 (o su appuntamento)

Pagina web: https://www.dm.uniba.it/members/mancini

Esercitatori:
Mirella Cappelletti Montano
mirella.cappellettimontano@uniba.it

Annunziata Loiudice
annunziata.loiudice@uniba.it

Canale teams del corso: codice **i6hfurs**

Lezioni

- Lunedì 9:00 - 11:00
- Mercoledì 9:00 - 11:00
- Giovedì 14:00 - 16:00
- Venerdì 11:00 - 13:00

Esame

- Prova scritta (calendario indicato sulla pagina web del corso)
- Prova orale **facoltativa** da sostenere entro il terzo mese successivo a quello in cui si è superata la prova scritta.

Programma del corso:

1. Richiami:
   - Insiemi e Logica
   - Numeri (insiemi numerici)
   - Equazioni e disequazioni
   - Funzioni
   - successioni

2. Funzioni di una variabile

   - funzioni reali di variabile reale:
     - Limiti
     - Continuità
     - Derivabilità e calcolo differenziale
     - Grafici di funzioni
     - Ottimizzare funzioni (trovare massimi e minimi)
     - Calcolo integrale

3. Equazioni differenziali ordinarie (EDO)
   - EDO di primo ordine a variabili separabili
   - EDO di primo ordine lineari
   - EDO di secondo ordine lineari a coefficienti costanti

4. Successioni e serie

5. Funzioni di più variabili (cenni)

Libri consigliati:

- BRAMANTI, CONFORTOLA, SALSA - Matematica per le Scienze
- BERTSCH, DALL'AGLIO, GIACOMELLI - Epsilon 1, primo corso di analisi matematica

Nota: Gli appunti delle lezioni saranno disponibili sulla pagina web del corso e sul canale teams

Insiemi e logica

Def Un **INSIEME** è una qualsiasi collezione di oggetti (detti **ELEMENTI**) per la quale è ben definita una legge di appartenenza.

ESEMPI

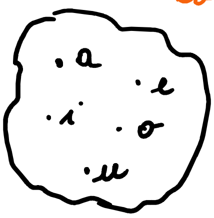
1) $A = \{1, 27, -4, 3, 7\}$

2) $B = \{a, e, i, o, u\}$

$= \{x \mid \text{è una vocale dell'alfabeto italiano}\}$

$\mid$ tale che (su alcuni libri indicato anche con ; o t.c.)

B



3) $C = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ è pari}\}$

$\in$ appartiene

$= \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$

$= \{n \in \mathbb{N} \mid \frac{n}{2} \in \mathbb{N}\}$

esistono diversi modi equivalenti di indicare un insieme.

Simboli utili

- $\in$ (appartiene)

  $2 \in \mathbb{N}$.

Si usa per indicare che un elemento fa parte di un dato insieme.

- $\notin$ (non appartiene)

  $\frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$

  $1 \notin \{a, e, i, o, u\}$

- $\emptyset$ insieme vuoto.

- $\subseteq$ (inclusione tra insiemi)

  $A \subseteq B$ si legge A è contenuto in B
  A è un sottoinsieme di B
  B contiene A.

  Significa:
  Ogni elemento di A appartiene anche a B.

  ESEMPI

  $\{a, e, i\} \subseteq \{a, e, i, o, u\}$

  $\{1, 3\} \subseteq \mathbb{N}$

  (Nota: su alcuni libri si usa $\subset$ invece di $\subseteq$)

- $\subsetneq$ (inclusione stretta)

  $A \subsetneq B$ significa che $A \subseteq B$ e $A \neq B$.

- $\not\subseteq$ (negazione dell'inclusione)

  $A \not\subseteq B$ significa che esiste almeno un elemento di A che non appartiene a B.

$\{1, a\} \not\subseteq \{a, e, i, o, u\}$

Simboli quantificatori:

- $\exists$ (esiste)
- $\nexists$ (non esiste)
- $\forall$ (per ogni / ogni)
- $\exists!$ (esiste ed è unico).

Simboli logici

- $\Rightarrow$ (implicazione logica).
  Si usa tra due affermazioni per dire che se è vera la prima, è vera anche la seconda
- $\not\Rightarrow$ (negazione dell'implicazione). Significa:

  C'è almeno un caso in cui la prima affermazione è vera e la seconda è falsa.
- $\Leftrightarrow$ (equivalenza logica / se e solo se)
- $\vee$ (o / oppure)
- $\wedge$ (e)
- $\neg$ (negazione)

Questi simboli si possono combinare tra loro per ottenere delle proposizioni logiche.

ESEMPI

1) Sia $x \in \mathbb{N}$. Se x non è pari, allora x è dispari. Si scrive:

- x è non è pari $\Rightarrow$ x è dispari
- $\neg$ (x è pari) $\Rightarrow$ x è dispari.

2) $\forall x \in \mathbb{N}$: x è pari o x è dispari
x è pari $\vee$ x è dispari.

3) Ogni numero naturale multiplo di 4 è pari.

- $\forall n \in \mathbb{N}$: n multiplo di 4 $\Rightarrow$ n è pari.
- Sia $n \in \mathbb{N}$: n multiplo di 4 $\Rightarrow$ n è pari.
- Sia $n \in \mathbb{N}$: n pari $\not\Rightarrow$ n multiplo di 4.
  (ad esempio 2 è pari ma non è multiplo di 4).

- $\neg$ ($\forall n \in \mathbb{N}$: n è pari $\vee$ n è multiplo di 4).

$\Leftrightarrow$ $\exists\, n \in \mathbb{N}$ t.c. $\neg$ (n è pari $\vee$ n è mult. di 4)

$\Leftrightarrow$ $\exists\, n \in \mathbb{N}$ t.c. n non è pari $\wedge$ n non è mult. di 4.

Ricordare

Negando una affermazione i simboli $\exists / \forall$ e i simboli $\vee / \wedge$ vanno invertiti.

- $\forall\, a, b \in \mathbb{N}$:

  a è pari $\wedge$ b è pari $\Rightarrow$ a + b è pari.

  a è pari $\vee$ b pari $\not\Rightarrow$ a + b è pari.

  a è pari $\vee$ b pari $\Rightarrow$ a · b è pari.

Operazioni tra insiemi

$A \subseteq B$ significa che ogni elemento di A appartiene anche a B.

OSS

$A = B \iff A \subseteq B \wedge B \subseteq A.$

$A \neq B \iff A \not\subseteq B \vee B \not\subseteq A.$

Def: Siano A, B due insiemi. Si definisce:

- UNIONE TRA A e B

  $$A \cup B = \{ x \mid x \in A \vee x \in B \}$$

- INTERSEZIONE TRA A e B:

  $$A \cap B = \{ x \mid x \in A \wedge x \in B \}$$

- DIFFERENZA TRA A e B:

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

ESEMPI

$A = \{1, 7, -3\}$

$B = \{10, 20, -23, 7, 18, a\}$

$A \cup B = \{1, 7, -3, 10, 20, -23, 18, a\}$

$A \cap B = \{7\}$ $\quad (7 \in A, \{7\} \subseteq A)$

$A \setminus B = \{1, -3\}$

$B \setminus A = \{10, 20, -23, 18, a\}$

OSS

1) $A \setminus B \neq B \setminus A$

2) n. di elementi di $A \cup B$ = n. di elementi di A + n. di elem. di B − n. di elementi di $A \cap B$.

Def Siano A e X due insiemi tali che $A \subseteq X$.
Si definisce COMPLEMENTARE DI A IN X l'insieme

$$C_X(A) = \{x \in X \mid x \notin A\} = X \setminus A.$$

ESEMPIO

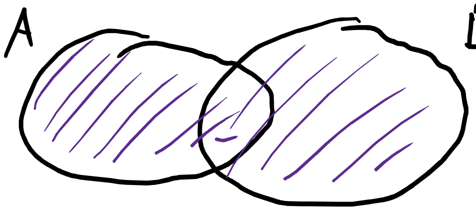
$X = \mathbb{N}$

$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ è pari}\}$

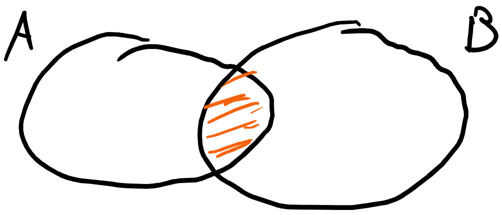
$C_X(A) = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ è dispari}\}$

Nota:
Nel caso in cui $X = \mathbb{R}$, $C_{\mathbb{R}}(A)$ si indica anche con A^c

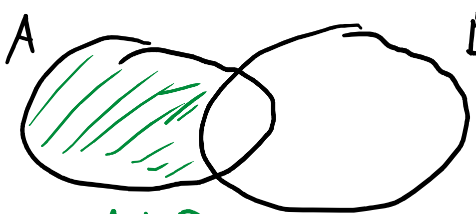
Rappresentazioni grafiche delle operazioni tra insiemi



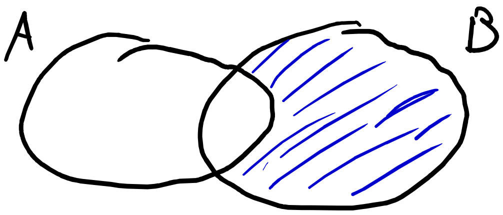
$A \cup B$



$A \cap B$



$A \setminus B$



$B \setminus A$.

$C_X(A)$.

PROPRIETÀ

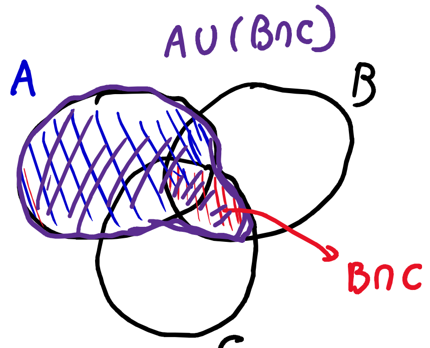
1) Siano A e B due insiemi. Allora:
$A \cup B = B \cup A$ e $A \cap B = B \cap A$.

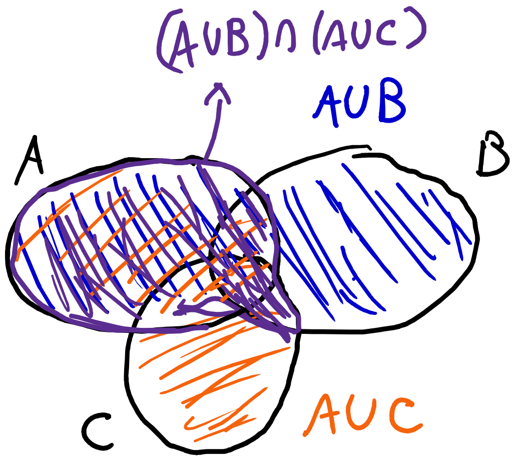
2) Siano A, B, C tre insiemi:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

e

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

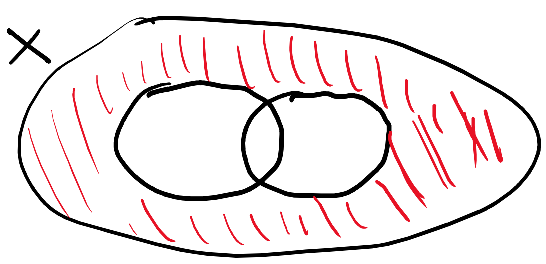




OSS Siano A, B, X tre insiemi, allora:

$$C_X(A \cup B) = C_X(A) \cap C_X(B)$$

$$C_X(A \cap B) = C_X(A) \cup C_X(B)$$



$C_X(A \cup B)$

$C_X(A) \cap C_X(B)$

Def: Siano A e B due insiemi. Si definisce PRODOTTO CARTESIANO TRA A E B l'insieme $A \times B$ di tutte le coppie ordinate in cui il primo elemento appartiene ad A e il secondo appartiene a B.

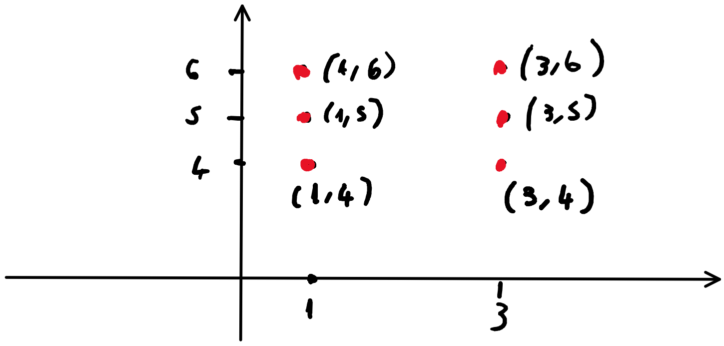
$$A \times B = \{ (a, b) \mid a \in A, \ b \in B \}$$

$A = \{ 1, 3 \}$

$B = \{ 4, 5, 6 \}$

$A \times B =$

$\{ (1,4), (3,4), (1,5), (3,5), (1,6), (3,6) \}$



Insiemi numerici

1) $\mathbb{N} = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5 \ldots \}$

NUMERI NATURALI

Nota: Questa non è una definizione ma un elenco dei simboli usati per rappresentare i numeri. La definizione assiomatica rigorosa di $\mathbb{N}$ si può dare tramite gli ASSIOMI DI PEANO che però non tratteremo in questo corso.

2) NUMERI INTERI

$\mathbb{Z} = \{ 0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots \}$

3) NUMERI RAZIONALI

$\mathbb{Q} = \{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, \ b \neq 0 \}$

OSS Operazioni tra frazioni

1) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$

2) $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}$

3) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

4) $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$

Attenzione

Evitate scritture del tipo $\frac{a}{\frac{b}{c}}$

Una delle linee di frazione deve essere più lunga per indicare la frazione principale

Altrimenti:

si rischia di confondere $\frac{a}{\frac{b}{c}}$ con $\frac{\frac{a}{b}}{c}$

$$\frac{a}{\frac{b}{c}} = a \cdot \frac{c}{b} = \frac{ac}{b}$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{c} = \frac{a}{bc}$$

ESEMPI

$$\frac{2}{\frac{1}{2}} = 2 \cdot 2 = 4$$

mentre

$$\frac{\frac{2}{1}}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Attenzione

$$\frac{a+c}{b} = \frac{a}{b} + \frac{c}{b}$$

ma $\dfrac{a}{b+c} \neq \dfrac{a}{b} + \dfrac{a}{c}$ (MAI SCRIVERE L' =)