MATEMATICA - LEZIONE 45

venerdì 9 gennaio 2026 11:04

Funzioni di più variabili

Sono funzioni $f: A \to B$ dove $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $B \subseteq \mathbb{R}^m$ con $n \geq 2$.

- Se $m = 1$, $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ si dice che f è una FUNZIONE REALE DI n VARIABILI REALI
- Se $m > 1$, f si dice una FUNZIONE VETTORIALE
- Se $n = m \geq 2$, f si dice un CAMPO VETTORIALE.

Consideriamo solo funzioni $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.
(funzioni reali di variabile reale)

ESEMPI

$f(x, y) = x^2 + y^2$ (2 variabili x e y)

$f(x, y, z) = e^{xy} + z$ (3 variabili: $x, y,$ e z)

$f(x_1, x_2) = x_1^2 e^{x_2} - \cos x_1$ (2 variabili x_1, x_2)

$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \dfrac{x_1^2}{1 + x_2^4} e^{x_2 x_3}$ (4 variabili: x_1, x_2, x_3, x_4)

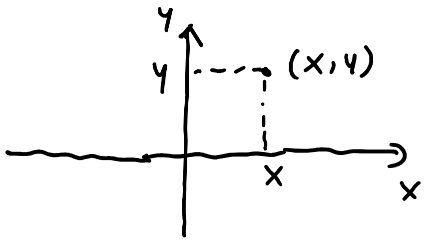
Proprietà di $\mathbb{R}^n$.

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R} \quad (n \text{ volte})$$

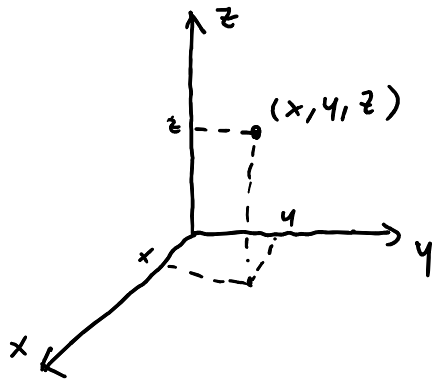
$$= \{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R} \}$$

Casi più semplici:

- $\mathbb{R}^2 = \{ (x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R} \}$
  $= \{ (x, y) \mid x, y \in \mathbb{R} \}$



- $\mathbb{R}^3 = \{ (x_1, x_2, x_3) \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \}$
  $= \{ (x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R} \}$



Notazioni comuni:

$x \in \mathbb{R}^n$ si scrive:

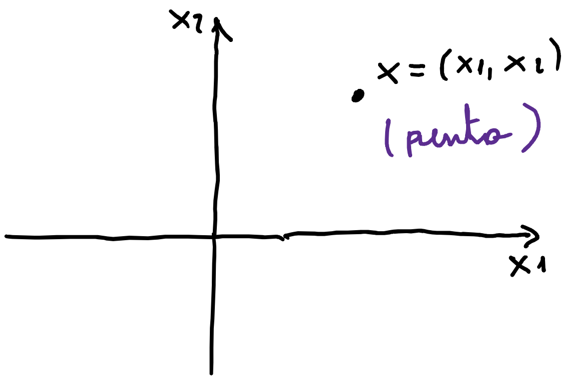
$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

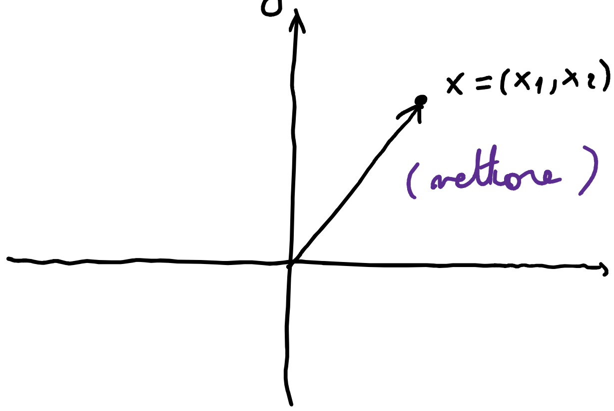
Su alcuni libri si usano anche le seguenti notazioni

$$\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) = [x_1, \dots, x_n]$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Gli elementi di $\mathbb{R}^n$ si possono interpretare come punti o come "vettori" uscenti dall'origine.





- $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$
  $\quad x \longmapsto f(x)$

Se $x = (x_1, \dots, x_n)$
$f(x) = f((x_1, \dots, x_n))$ si scrive più semplicemente come $f(x_1, \dots, x_n)$.

ESEMPIO

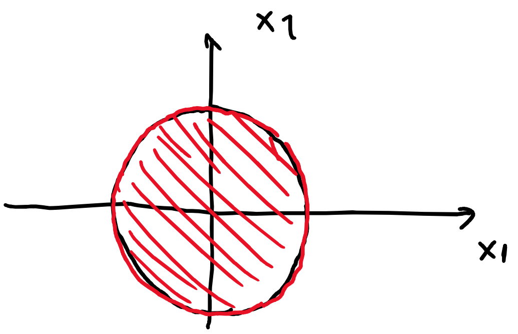
$$f(x_1, x_2) = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}$$

Qual è il dominio / campo di esistenza di f?

$$1 - x_1^2 - x_2^2 \geq 0$$

cioè $x_1^2 + x_2^2 \leq 1$.

$$\mathrm{Dom}(f) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$$



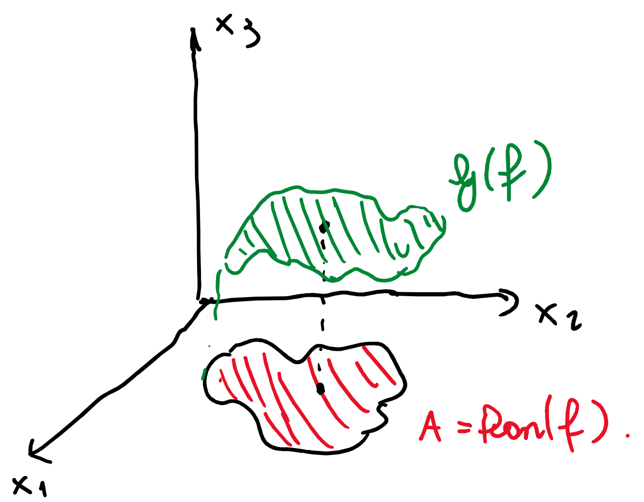
è il cerchio di centro $(0,0)$ e raggio 1.

oss Se $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $A \neq \emptyset$ e $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ allora il grafico di f

$$\mathcal{G}(f) = \{ (x, f(x)) \mid x \in A \}$$
$$= \{ (x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n)) \mid (x_1, \dots, x_n) \in A \}$$

è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^{n+1}$.

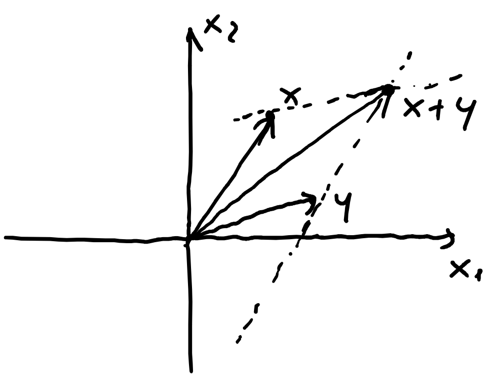
- Se $n = 2$, $\mathcal{G}(f) \subseteq \mathbb{R}^3$



Operazioni in $\mathbb{R}^n$

- Addizione : $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$

$$x + y := (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n).$$



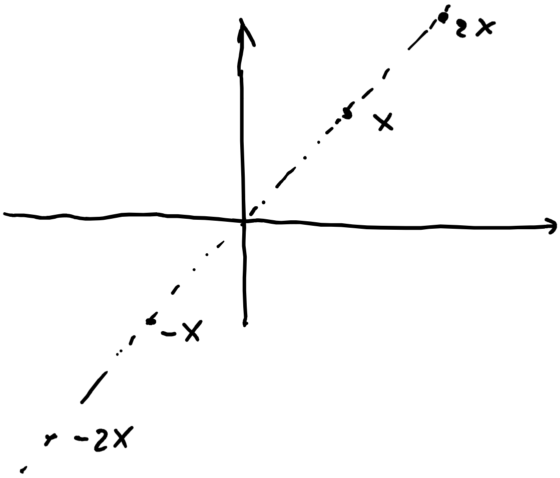
- **Sottrazione**:

$$x - y := (x_1 - y_1, \ldots\ldots, x_n - y_n)$$

- **Moltiplicazione per un numero reale**:

Se $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ allora:

$$\lambda x := (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n).$$



- **Prodotto scalare** $(\,\cdot\,,\ \langle , \rangle)$

$x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$

$$x \cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots\ldots + x_n y_n$$

$$= \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

- **Norma / Modulo**.

$x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}$, si definisce NORMA (o MODULO) di x, la quantità

$$\|x\| := \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}.$$

ESEMPI

In $\mathbb{R}^3$, consideriamo

$x = (2, 3, 5)$ e $y = (-2, 1, 0)$. Allora:

$x+y = (0, 4, 5)$

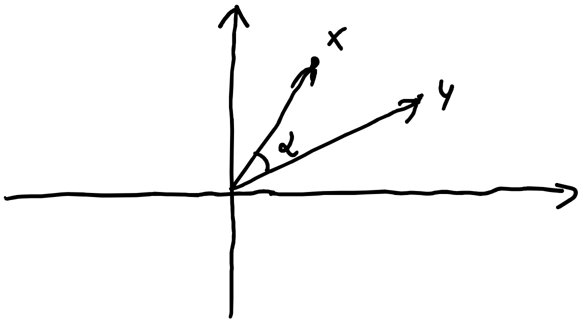
$3x = (6, 9, 15)$

$x \cdot y = 2 \cdot (-2) + 3 \cdot 1 + 5 \cdot 0 = -4+3+0$
$= -1.$

$\|x\| = \sqrt{2^2+3^2+5^2} = \sqrt{4+9+25} = \sqrt{38}$

$\|y\| = \sqrt{(-2)^2+1^2+0^2} = \sqrt{5}$

OSS Si può dimostrare che $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n$
$x \cdot y = \|x\| \|y\| \cos\alpha$ dove α è l'angolo formato dai vettori x, y.



$x \cdot y = \|x\| \|y\| \cos\alpha$

Def: Siano $x, y \in \mathbb{R}^n$ con $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots, y_n)$. Si dice che x e y sono ORTOGONALI se $x \cdot y = 0$

Si dice che x e y sono PARALLELI se $\exists\, \lambda \in \mathbb{R}$ t.c. $x = \lambda y$ o $y = \lambda x$.

Base canonica di $\mathbb{R}^n$

$x = (x_1, \ldots\ldots x_n)$

$= (x_1, 0, \ldots\ldots, 0) + (0, x_2, 0 \ldots 0) + \ldots\ldots + (0, \ldots, 0, x_n)$

$= x_1(1, 0, \ldots\ldots 0) + x_2(0, 1, 0, \ldots, 0) + \ldots\ldots + x_n(0, \ldots 0, 1)$

Notazioni: Indichiamo con e_i il punto
$e_i = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{}, 0, \dots 0)$
i-esima coordinata.

OSS

1) $\forall\, x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$: $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$

$= x_1 e_1 + \dots\dots + x_n e_n$

2) $e_1, \dots, e_n$ sono ortogonali a coppie cioè
$e_i \cdot e_j = 0 \quad \forall\, i \neq j.$

3) $\| e_i \| = 1.$

4) $\forall\, x = (x_1, \dots, x_n)$: $x_i = x \cdot e_i$

Def: Gli elementi $\{e_1, \dots, e_n\}$ si dicono BASE CANONICA di $\mathbb{R}^n$.

Caso particolare:

Se $n = 3$:

$e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$

si indicano anche con $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

$x = (2, 3, 5)$

$= 2 e_1 + 3 e_2 + 5 e_3$

$= 2\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}.$

PROPRIETÀ DELLA NORMA IN $\mathbb{R}^n$.

1) $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\| \in \mathbb{R}$ e $\|x\| \geq 0$.
2) $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\| = 0 \iff x = (0, \dots, 0)$
3) $\forall x \in \mathbb{R}^n$ e $\forall \lambda \in \mathbb{R}$: $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$.
4) $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$: $\|x \pm y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE)
5) $\forall x, y$: $\big| \|x\| - \|y\| \big| \leq \|x - y\|$
6) $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ $|x \cdot y| \leq \|x\| \|y\|$ (DISUGUAGLIANZA DI CAUCHY - SCHWARZ)

$\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\|$ rappresenta la distanza di x da $(0, \dots, 0)$.

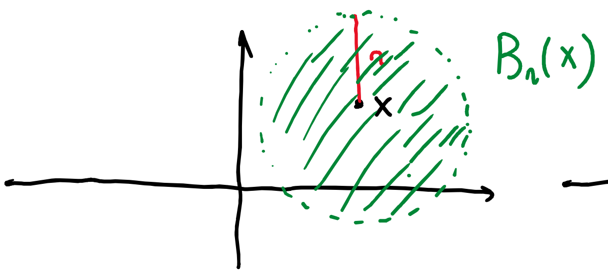
Def: Dati $x, y \in \mathbb{R}^n$, definiamo DISTANZA tra x e y la quantità $d(x,y) := \|x - y\|$

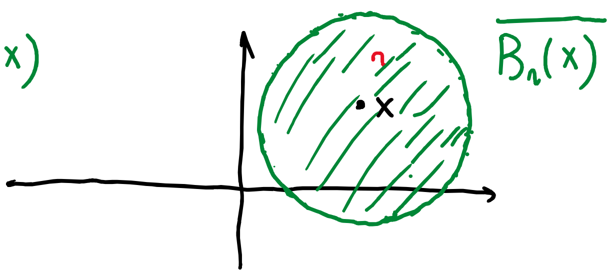
Def: Sia $x \in \mathbb{R}^n$ e sia $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$. Si definisce PALLA APERTA DI CENTRO x E RAGGIO r l'insieme

$$B_r(x) := \{ y \in \mathbb{R}^n \mid \|y - x\| < r \}.$$

Si definisce PALLA CHIUSA DI CENTRO x E RAGGIO r l'insieme

$$\overline{B_r(x)} := \{ y \in \mathbb{R}^n \mid \|y - x\| \leq r \}$$





Def Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e $x \in \mathbb{R}^n$. Si dice che x è un PUNTO DI ACCUMULAZIONE PER A se $\forall r > 0$:
$B_r(x) \cap A \setminus \{x\} \neq \emptyset$. (l'insieme dei punti di acc. si indica con $D(A)$)

Def (Limiti per funzioni di più variabili)
Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e siano $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in D(A)$ e $L \in \overline{\mathbb{R}}$. Si dice che IL LIMITE PER X CHE TENDE A x_0 DI $f(x)$ È L $\left(\lim_{x \to x_0} f(x) = L\right)$ se

$\forall V \in \mathcal{D}_L$ $\exists r > 0$ t.c. $\forall x \in A \cap B_r(x_0) \setminus \{x_0\}$: $f(x) \in V$.

Def: Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e sia $x_0 \in A$. Sia $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$. Si dice che f è CONTINUA IN x_0 se vale una delle seguenti proprietà:

1) $x_0 \in A \cap D(A)$ e $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
2) $x_0 \in A \setminus D(A)$ (x_0 è un punto isolato di A).

Nota:

Valgono tutti i teoremi sulle operazioni tra limiti o tra funzioni continue.

Def: Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme. Si dice che:

1) A è APERTO se $\forall x \in A$ $\exists r > 0$ t.c.
$$B_r(x) \subseteq A.$$

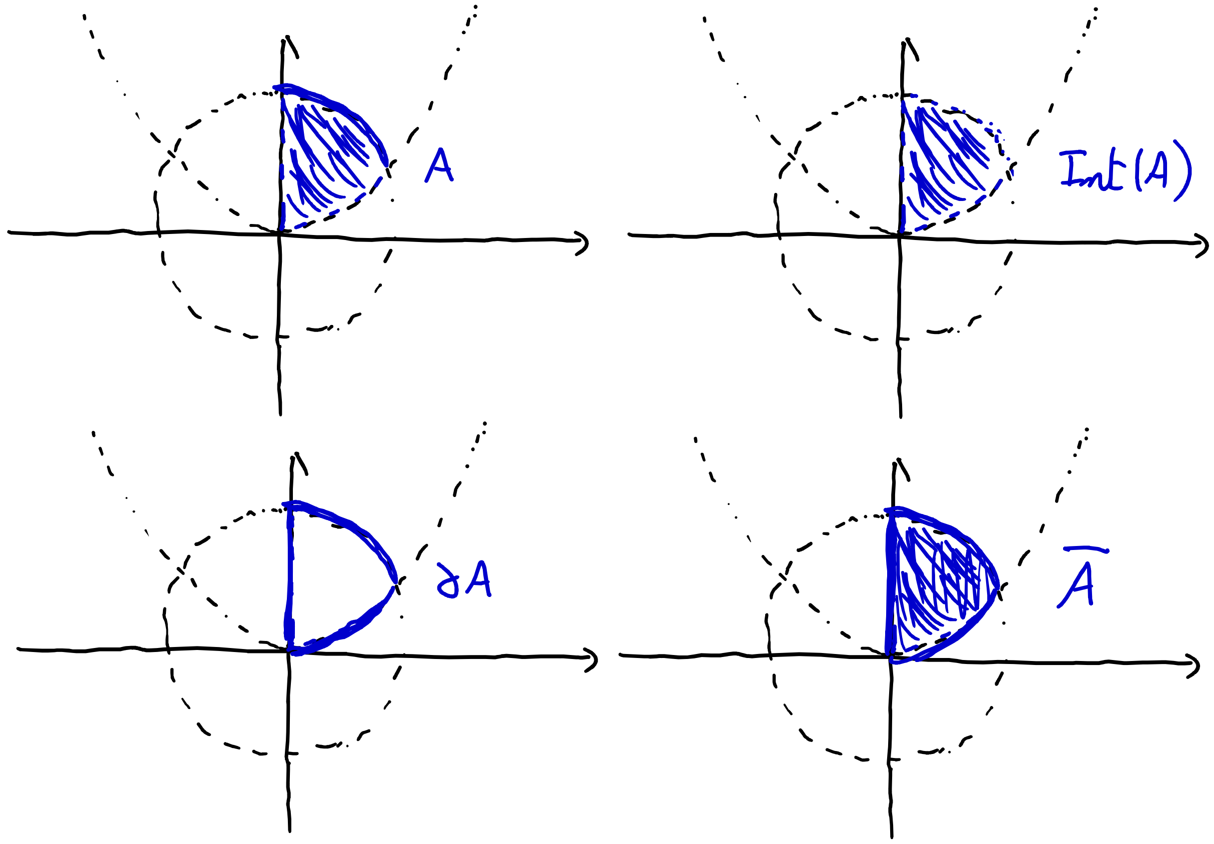
2) A è CHIUSO se $\mathbb{R}^n \setminus A$ è aperto.

Inoltre possiamo definire:

- INTERNO DI A l'insieme
  $$Int(A) = \{ x \in A \mid \exists\, r > 0 \text{ t.c. } B_r(x) \subseteq A \}.$$
- BORDO DI A l'insieme
  $$\partial A = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \forall\, r > 0 \ B_r(x) \cap A \neq \emptyset \text{ e } B_r(x) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) \neq \emptyset \}$$
- CHIUSURA DI A l'insieme $\overline{A} := A \cup \partial A$.

ESEMPIO

$$A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4 \,,\ x > 0 \,,\ y \geq x^2 \}$$



OSS

A è aperto $\iff A = Int(A) \iff \partial A \cap A = \emptyset$.

A è chiuso $\iff A = \overline{A} \iff \partial A \subseteq A$.

Derivate parziali di una funzione di più variabili.

Idea:

Supponiamo di avere una funzione

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^3 y$$

Si può fare la derivata singolarmente rispetto alle tre variabili x, y e z.

$$\frac{d}{dx} x^2 + y^2 + z^3 y = 2x + 0 = 2x$$

$$\frac{d}{dy} x^2 + y^2 + z^3 y = 0 + 2y + z^3 = 2y + z^3.$$

$$\frac{d}{dz} x^2 + y^2 + z^3 y = 0 + 0 + 3z^2 y = 3z^2 y.$$

Queste tre funzioni si chiamano derivate parziali di f.

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 x_2^3 x_3 + \cos x_3 + x_1 x_4^5$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d}{dx_1} f(x_1, x_2, x_3, x_4) &= x_2^3 x_3 + x_4^5 \\
\frac{d}{dx_2} f(x_1, x_2, x_3, x_4) &= 3 x_1 x_2^2 x_3 \\
\frac{d}{dx_3} f(x_1, x_2, x_3, x_4) &= x_1 x_2^3 - \sin x_3 \\
\frac{d}{dx_4} f(x_1, x_2, x_3, x_4) &= 5 x_1 x_4^4.
\end{aligned}\right]$$

4 derivate parziali

Cos'è rigorosamente una derivata parziale?

Se fissiamo le variabili $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$ e facciamo variare x_i. La derivata parziale di f è la derivata della funzione di una variabile

$s \to f(x_1, x_2, \dots, s, \dots, x_n)$ calcolata in $s = x_i$.

cioè è il limite:

$$\lim_{s \to x_i} \frac{f(x_1, \dots, s, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n)}{s - x_i}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{f(x_1, \dots, x_i + t, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{f((x_1, \dots, x_n) + t(0, \dots, 1, \dots, 0)) - f(x_1, \dots, x_n)}{t}.$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{f(x + t e_i) - f(x)}{t}$$

Def: Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e siano $f: A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$ e $i \in \{1, \dots, n\}$. Supponiamo che $t = 0$ sia un punto di accumulazione per la funzione $t \to f(x_0 + t e_i)$. Allora definiamo DERIVATA PARZIALE DI f IN x_0 RISPETTO ALLA VARIABILE x_i la quantità (se esiste) $\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t e_i) - f(x_0)}{t}$.

(si indica con $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$ o $D_{x_i} f(x_0)$, $f_{x_i}(x_0)$).

Se f è parzialmente derivabile in x_0 rispetto a tutte le variabili $x_1, \dots, x_n$, si definisce GRADIENTE DI f in x_0 il vettore:

$$\nabla f(x_0) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \right)$$