

## Equazioni differenziali lineari del II ordine

$$(*) \quad ay'' + by' + cy = g(x)$$

con  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$  e  $g: I \rightarrow \mathbb{R}$  continua

La soluzione generale di  $(*)$  è data da

$$g(x) = y_0(x) + y_p(x), \quad \text{con}$$

$y_0$  è la soluzione generale di

$$ay'' + by' + cy = 0.$$

e  $y_p$  è una soluzione particolare di  $(*)$  che

viene determinata con opportuni metodi (es. esempio  
SIMILARE ITA')

Com si determinare  $y_0$ ?

$$a y'' + b y' + c y = 0 \quad (**)$$

Consideriamo il polinomio caratteristico

$$P(\lambda) = a \lambda^2 + b \lambda + c$$

e risolviamo

$$a \lambda^2 + b \lambda + c = 0$$

(1)  $\Delta = b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow P(\lambda) = 0$  ha due soluzioni reali  $\lambda_1, \lambda_2$  con  $\lambda_1 \neq \lambda_2$

Allora la soluzione generale di  $(**)$  è

$$y_0(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$$(2) \quad \Delta = b^2 - 4ac = 0$$

Alors  $\lambda^2 + b\lambda + c = 0$  he unique solution

$\lambda_1$  (multiplicity 2)

hence

$$y'' + by' + cy = 0$$

the general solution

$$y_0(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_1 x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

(3)  $\Delta < 0$ , alors

$$\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

the solution  $\alpha \pm i\beta$

Infolge

$$ay'' + by' + cy = 0$$

he Lösungsfunktion allgemein

$$y_0(x) = c_1 e^{\lambda x} \cos \beta x + c_2 e^{\lambda x} \sin \beta x$$

$$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Determiniere die Lösungsfunktion allgemein.

$$y'' - 3y' + 2y = x^2 + 5x - 1$$

Bestimme nun die Lösungsfunktion allgemein.

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

Risolviamo

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1 \vee \lambda = 2$$

Allora la soluzione generale di

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

è

$$y_0(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Allora dobbiamo determinare  $y_p(x)$

Con il metodo di SIMILARITÀ cerchiamo

$$y_p(x) = Ax^2 + Bx + C$$

e determiniamo i coefficienti  $A, B, C$  affinché  $y_p$  è  
soluzione di  $y'' - 3y' + 2y = x + 5x - 1$ .

$$y_p'(x) = 2Ax + B$$

$$y_p''(x) = 2A$$

Also

$$2A - 3(2Ax + B) + 2(Ax^2 + Bx + C) = x^2 + 5x - 1$$

$$\underbrace{2A} - \underbrace{6Ax} - \underbrace{3B} + \underbrace{2Ax^2} + \underbrace{2Bx} + \underbrace{2C} = x^2 + 5x - 1$$

$$2Ax^2 + x(-6A + 2B) + 2A - 3B + 2C = x^2 + 5x - 1$$

by comparing you solve

$$\begin{cases} 2A = 1 \\ -6A + 2B = 5 \\ 2A - 3B + 2C = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ -3 + 2B = 5 \Rightarrow B = 4 \\ 1 - 12 + 2C = -1 \Rightarrow C = 5 \end{cases}$$

La soluzione generale si:

$$y'' - 3y' + y = x^2 + 5x - 1$$

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + \frac{1}{2}x^2 + 4x + 5$$

$$\begin{cases} y'' - y' = 3x^2 + 1 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

PROBLEMA DI CAUCHY

con prime due soluzioni

$$y'' - y' = 3x^2 + 1$$

Risposta

$$y'' - y' = 0$$

Per rispondere all'equazione

$$\lambda^2 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda - 1) = 0 \begin{cases} \boxed{\lambda = 0} \\ \lambda = 1 \end{cases} !!$$

Allora

$$y_0(x) = C_1 e^{0x} + C_2 e^x = C_1 + C_2 e^x$$

Le soluzioni particolari  $y_p(x)$  si trovano per

ricerca di una soluzione particolare per  $x^k$ , dove  $k$  è

la molteplicità di  $\lambda = 0$  come soluzione dell'equazione

quadratica  $P(\lambda) = 0$   
(nel nostro caso,  $k = 1$ )

Alloce

$$y_p(x) = x(Ax^2 + Bx + C) = Ax^3 + Bx^2 + \underbrace{Cx}$$

Dobbiamo imporre che  $y_p$  è soluzione

$$y_p'(x) = 3Ax^2 + 2Bx + C$$

$$y_p''(x) = 6Ax + 2B$$

Devo

$$6Ax + 2B - 3Ax^2 - 2Bx - C = 3x^2 + 1$$

$$-3Ax^2 + x(6A - 2B) + 2B - C = 3x^2 + 1$$

$$\begin{cases} -3A = 3 \\ 6A - 2B = 0 \\ 2B - C = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = -1 \\ -6 - 2B = 0 \Rightarrow B = -3 \\ -6 - C = 1 \quad C = -7 \end{cases}$$

Is solution in general still' eq. diff 1

$$y(x) = c_1 + c_2 e^x + x(-x^2 - 3x - 7) =$$
$$= c_1 + c_2 e^x - x^3 - 3x^2 - 7x$$

Do however replace the problem st. Cauchy

$$y(0) = 1 \Rightarrow c_1 + c_2 e^0 = 1 \Rightarrow c_1 + c_2 = 1$$

$$y'(0) = 0$$

$$y'(x) = c_2 e^x - 3x^2 - 6x - 7$$

Implies  $y'(0) = 0 \Rightarrow c_2 - 7 = 0$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ c_2 - 7 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 = -6 \\ c_2 = 7 \end{cases}$$

Abbiamo la soluzione del problema di Cauchy e

$$\begin{aligned} y(x) &= -6 + 7e^x - 3x^2 - 6x - 7 = \\ &= 7e^x - 3x^2 - 6x - 13 \end{aligned}$$

$$y'' + y = x e^{3x}$$

Troviamo la soluzione generale di

$$y'' + y = 0$$

L'equazione di ricerca ha discriminante

$$\Delta^2 + 1 = 0$$

$$\Delta = -1 < 0$$

$$\lambda = \pm i$$

troviamo nel caso di soluzioni complesse

$$(\lambda \pm i\beta, \text{ con } \lambda = 0, \beta = 1)$$

Allora

$$y_0(x) = e^{0x} (c_1 \cos x + c_2 \sin x) =$$

$$= c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

Dobbiamo trovare  $y_p(x)$

$$g(x) = P(x) e^{\alpha x},$$

$P(x)$  polinomio di grado  $m$

Allora

$$y_p(x) = Q(x) e^{\alpha x},$$

con  $Q(x)$  polinomio di grado  $m$

Nel nostro caso

$$g(x) = x e^{3x}$$

( $r=3$ ,  $p(x)$  polinomio di primo grado)

Allora

$$y_p(x) = (Ax+B) e^{3x}$$

Calcoliamo  $y_p'$  e  $y_p''$

$$y_p'(x) = A e^{3x} + 3(Ax+B) e^{3x}$$

$$\begin{aligned} y_p''(x) &= 3A e^{3x} + 3 \{ A e^{3x} + 3(Ax+B) e^{3x} \} = \\ &= 3A e^{3x} + 3A e^{3x} + 9(Ax+B) e^{3x} = \end{aligned}$$

$$= 6Ae^{3x} + 9(Ax+B)e^{3x}$$

Daher ist im Power der  $y_p(x)$  zu setzen

$$y'' + y = xe^{3x}$$

Also

$$6A \cancel{e^{3x}} + 9(Ax+B) \cancel{e^{3x}} + (Ax+B) \cancel{e^{3x}} = x \cancel{e^{3x}}$$

$e^{3x} \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$10(Ax+B) + 6A = x$$

$$10Ax + 10B + 6A = x$$

$$\begin{cases} 10A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{10} \\ 10B + 6A = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = \frac{1}{10} \\ 10B + \frac{6}{10} = 0 \\ B = \frac{-\frac{6}{10}}{10} = -\frac{3}{50} \end{cases}$$

Le solution still 'equation' different

$$y(x) = \underbrace{c_1 \cos x + c_2 \sin x}_{\text{homogeneous}} + \underbrace{\left( \frac{1}{10}x + \frac{3}{50} \right) e^{3x}}_{\text{solution particular}}$$

$$y'' - 9y = e^{-3x}$$

Risolviemo l'equation omogenea

$$y'' - 9y = 0$$

$$\lambda^2 - 9 = 0 \Rightarrow \lambda = 3 \vee \boxed{\lambda = -3} !!$$

$$y_0(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x}$$

Siamo nel caso in cui

$$g(x) = P(x) e^{\gamma x}$$

con  $\gamma$  soluzione dell'equazione

$$\gamma^2 + b\gamma + c = 0$$

di molteplicità  $K$

$$\text{Allora } y_p(x) = x^K P(x) e^{\gamma x}$$

Nel nostro caso,  $P(x) = 1$   $\gamma = -3$  e

molteplicità 1 di  $\lambda^2 - 3 = 0$

$$\text{Allora } y_p(x) = x(A e^{-3x}) = A x e^{-3x}$$

$$y_p(x) = A x e^{-3x}$$

$$y_p'(x) = A (e^{-3x} - 3x e^{-3x})$$

$$y_p''(x) = A (-3e^{-3x} - 3e^{-3x} - 3(-3x e^{-3x})) =$$

$$= A (-6e^{-3x} + 9x e^{-3x})$$

Impulse in the  $y_p$  is solution

$$y'' - 9y = e^{-3x}$$

$$+ 9 \cancel{A x e^{-3x}} - 6A e^{-3x} - 9 \cancel{A x e^{-3x}} = e^{-3x}$$

$$- 6A \cancel{e^{-3x}} = \cancel{e^{-3x}} \Rightarrow -6A = 1 \Rightarrow A = -\frac{1}{6}$$

Rice problem

$$y(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x} - \frac{1}{6} x e^{-3x}$$

$$y'' - 4y' + 5y = 3x + 1$$

Risolveremo

$$y'' - 4y' + 5y = 0$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$$

$$\Delta = 16 - 4 \cdot 5 = 16 - 20 = -4 < 0$$

Risultato

$$\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 20}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2} =$$

$$= \frac{4 \pm 2i}{2} = 2 \pm i$$

$$\left( \begin{array}{l} \alpha = 2 \\ \beta = 1 \end{array} \right)$$

Allora

$$y_0(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{2x}$$

$$y(x) = 3x + 1$$

Allora  $y_p(x) = Ax + B$

$$y'_p(x) = A$$

$$y''_p(x) = 0$$

Improve us ch  $y$  is solution to

$$y'' - 4y' + 5y = 3x + 1$$

$$0 - 4A + 5(Ax + B) = 3x + 1$$

$$5Ax - 4A + 5B = 3x + 1$$

$$\begin{cases} 5A = 3 \\ -4A + 5B = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} A = \frac{3}{5} \\ -\frac{12}{5} + 5B = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = +\frac{3}{5} \\ 5B = \frac{17}{5} \Rightarrow B = \frac{17}{25} \end{cases}$$

Albwa

$$y(x) = c_1 e^{2x} \cos x + c_2 e^{2x} \sin x + \frac{3}{5}x + \frac{17}{25}$$

Vogliamo risolvere

$$\begin{cases} y'' - 4y' + 5y = 3x + 1 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Chiamiamo i valori in parte?

$$y(0) = 0 \Rightarrow c_1 e^{2 \cdot 0} \cos 0 + c_2 e^{2 \cdot 0} \sin 0 + \frac{3}{5} \cdot 0 + \frac{17}{25} = 0$$

$$\Rightarrow c_1 + \frac{17}{25} = 0 \Rightarrow \boxed{c_1 = -\frac{17}{25}}$$

Imponiamo la condizione  $y'(0) = 0$

$$y(x) = c_1 e^{2x} \cos x + c_2 e^{2x} \sin x + \frac{3}{5}x + \frac{17}{25}$$

$$y'(x) = c_1 (2e^{2x} \cos x - e^{2x} \sin x) +$$

$$+ c_2 (2e^{2x} \sin x + e^{2x} \cos x) + \frac{3}{5}$$

$$y'(0) = c_1 (2e^0 \cos 0 - \cancel{e^0 \sin 0}) +$$

$$+ c_2 (\cancel{2e^0 \sin 0} + e^0 \cos 0) + \frac{3}{5} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{2c_1 + c_2 + \frac{3}{5} = 0}$$

$$\begin{cases} c_1 = -\frac{17}{25} \\ c_2 = -\frac{3}{5} - \frac{34}{25} \end{cases}$$

$$y'' + 2y' + y = x e^{-x}$$

Risolviamo prima

$$y'' + 2y' + y = 0$$

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \quad (\Rightarrow) \quad (\lambda + 1)^2 = 0$$

$\lambda = -1$  !! soluzione con molteplicità 2

Allora  $y_0(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}$

$$y_p(x) = x^{(2)} (ax + b) e^{-x}$$

per di-

$$y(x) = P(x) e^{\gamma x} \quad \gamma \text{ is solution}$$

$$\text{or } a \lambda^2 + b \lambda + c = 0 \quad \text{or } \text{mult}_\lambda = \text{multiplicity}$$

$$y_p(x) = (Ax^3 + Bx^2) e^{-x}$$

FINIRE A CAT

$$A = \frac{1}{6} \quad B = 0$$