MATEMATICA - LEZIONE 42

lunedì 15 dicembre 2025 09:03

Equazioni lineari di I ordine.

Sono equazioni differenziali del tipo

$$y' = a(x)\, y + g(x).$$

con $a, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue in $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo.

- Se $g(x) = 0 \ \forall x \in I$, l'equazione si dice OMOGENEA
- Se $g(x) \neq 0$, l'eq. si dice COMPLETA o NON OMOGENEA.

- Per le eq. omogenee $y' = a(x)\, y$, la soluzione generale è
$y(x) = K e^{A(x)}$ dove A è una primitiva di $a(x)$ (cioè $A'(x) = a(x)$ o $\int a(x)\,dx = A(x) + c$) e $K \in \mathbb{R}$.

ESEMPI

1) $y' = \underbrace{x^4}_{a(x)} y$

$$\int x^4\,dx = \frac{1}{5}x^5 + c \implies A(x) = \frac{1}{5}x^5$$

(si può scegliere $c = 0$)

La soluzione generale dell'equazione è

$y(x) = K e^{A(x)} = K e^{\frac{1}{5}x^5}$ con $K \in \mathbb{R}$.

Nota: $K e^{\frac{1}{3}x^5 + c} = \underbrace{K e^{c}}_{K_1} e^{\frac{1}{5}x^5}$ quindi la sol. generale trovata non dipende dalla scelta di C nell'espressione di $A(x)$.

2) $y' = \sin(2x)\, y$

$a(x) = \sin(2x)$

$\int a(x)\,dx = \int \sin(2x)\,dx = -\frac{1}{2}\cos(2x) + C$

$A(x) = -\frac{1}{2}\cos(2x)$

La sol. generale dell'equazione è

$y(x) = K e^{-\frac{1}{2}\cos(2x)}$ con $K \in \mathbb{R}$

3) Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y}{(3x-1)^2} \\ y(0) = e \end{cases}$$

Iniziamo trovando la sol generale dell'eq:

$y' = \frac{y}{(3x-1)^2} = \frac{1}{(3x-1)^2}\, y$

$a(x) = \frac{1}{(3x-1)^2}$

$$a(x) = \frac{}{(3x-1)^2}$$

$$\int \frac{1}{(3x-1)^2}\,dx \overset{\substack{s=3x-1\\ ds=3dx}}{=} \int \frac{1}{s^2}\,\frac{1}{3}\,ds$$

$$= \frac{1}{3}\int s^{-2}\,ds = -\frac{1}{3}\,\frac{1}{s} + C$$

$$= -\frac{1}{3}\,\frac{1}{3x-1} + C$$

$$A(x) = -\frac{1}{3}\,\frac{1}{3x-1}$$

La soluzione generale dell'equazione differenziale

è $y(x) = K e^{-\frac{1}{3}\frac{1}{3x-1}}$ con $K \in \mathbb{R}$

Vogliamo trovare l'unica soluzione che soddisfa $y(0) = e$

$$y(x) = K e^{-\frac{1}{3}\frac{1}{3x-1}}$$

$$y(0) = K e^{\frac{1}{3}}$$

$$y(0) = e \iff K e^{\frac{1}{3}} = e$$

$$\iff K = e^{\frac{2}{3}}$$

Quindi la sol. del problema di Cauchy è

$$y(x) = e^{\frac{2}{3}}\, e^{-\frac{1}{3}\frac{1}{3x-1}} = e^{\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\frac{1}{3x-1}}$$

- Equazioni lineari di I ordine non omogenee.

$$y' = a(x)\,y + g(x).$$

Consideriamo il caso $g(x) \neq 0$.

PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE

Se y_1 e y_2 sono soluzioni di

$$y_1' = a(x)\, y_1 + g_1(x)$$

$$y_2' = a(x)\, y_2 + g_2(x)$$

e $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$, allora $z = \alpha y_1 + \beta y_2$ risolve:

$$z' = a(x)\, z + \alpha g_1(x) + \beta g_2(x).$$

In particolare:

se $g_1 = g_2 = g$ e $z = y_1 - y_2$, allora

$z' = a(x)\, z$ (cioè z risolve l'eq. omogenea associata alle equazioni risolte da y_1 e y_2)

CONSEGUENZA

Se conosciamo

1) la soluzione generale y_0 di $y' = a(x)\, y$.

2) Una soluzione particolare $\bar{y}$ di

$$y' = a(x)\, y + g(x)$$

allora la soluzione generale dell'equazione completa $y' = a(x)\, y + g(x)$ è:

$$y(x) = y_0(x) + \bar{y}(x).$$

Conseguenza:

- Per risolvere $y' = a(x)\,y + g(x)$:

1) Si considera l'equazione omogenea associata: $y' = a(x)\,y$. Se ne trova la sol. generale $y_0(x) = K e^{A(x)}$.

2) Si cerca una soluzione particolare $\bar{y}(x)$ dell'equazione completa

3) Conclusione $y(x) = y_0(x) + \bar{y}(x)$.

Per il punto 2) esistono due metodi:

- Metodo di VARIAZIONE DELLE COSTANTI
- Metodo di SOMIGLIANZA / SIMILARITÀ

Metodo di Variazione delle costanti

$$y' = a(x)\,y + g(x)$$

Si cerca $\bar{y}(x)$ della forma $\bar{y}(x) = K(x)\,e^{A(x)}$. Allora.

$$\bar{y}'(x) = K'(x)\,e^{A(x)} + K(x)\,e^{A(x)}A'(x)$$
$$= K'(x)\,e^{A(x)} + K(x)\,e^{A(x)}a(x)$$

Quindi $\bar{y}$ risolve l'equazione se e solo se:

$$K'(x)\,e^{A(x)} + K(x)\,e^{A(x)}a(x) = a(x)\,\bar{y}(x) + g(x)$$
$$K'(x)\,e^{A(x)} + \cancel{K(x)\,e^{A(x)}a(x)} = \cancel{a(x)\,K(x)\,e^{A(x)}} + g(x)$$

$$K'(x)\, e^{A(x)} = g(x)$$

$$K'(x) = e^{-A(x)} g(x)$$

$$K(x) = \int e^{-A(x)} g(x)\, dx$$

ESEMPI

1) $y' = \frac{y}{x} + x^2$ con $x > 0$.

- Risolviamo $y' = \frac{y}{x} = \frac{1}{x} y$

  $a(x) = \frac{1}{x}$

  $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c$ $\quad$ ($x > 0$ quindi $\ln|x| = \ln x$)

  la soluzione generale dell'eq. omogenea è

  $y_0(x) = K e^{\ln x} = K x.$ $\quad$ $(A(x) = \ln x)$

- Metodo di variazione delle costanti per cercare una soluzione particolare del tipo

  $\bar{y}(x) = K(x) \cdot x.$

  Imponiamo che $\bar{y}$ risolva l'eq. $y' = \frac{y}{x} + x^2$.

  $\bar{y}'(x) = K'(x)\, x + K(x)$

  Vogliamo:

  $$K'(x)\, x + \cancel{K(x)} = \frac{\cancel{K(x)} \cdot \cancel{x}}{\cancel{x}} + x^2$$

  $$K'(x)\, x = x^2$$

  $$K'(x) = x$$

  $$K(x) = \int x\, dx = \frac{1}{2} x^2 + c$$

Scegliamo

$K(x) = \frac{1}{2} x^2$

Allora $\bar{y}(x) = K(x) \cdot x = \frac{1}{2} x^3$.

- Conclusione:

La soluzione generale dell'eq. completa è

$y(x) = y_0(x) + \bar{y}(x) = Kx + \frac{1}{2} x^3$.

2) $\begin{cases} y' = 3x^2 y + e^{x^3} \ln x \\ y(1) = 2e \end{cases}$

$y' = 3x^2 y + e^{x^3} \ln x$

Eq. lineare di I ordine non omogenea

$a(x) = 3x^2$ e $f(x) = e^{x^3} \ln x$.

- Risolviamo

$y' = 3x^2 y$

$\int 3x^2 \, dx = x^3 + c$

$A(x) = x^3$

La sol. generale dell'eq. omogenea è

$y_0(x) = K e^{x^3}$ con $K \in \mathbb{R}$.

- Cerchiamo una sol. dell'eq. completa con il metodo di variazione delle costanti:

$\bar{y}(x) = K(x) e^{x^3}$

$\bar{y}'(x) = K'(x) e^{x^3} + K(x) e^{x^3} \cdot 3x^2$

Vogliamo: $y' = 3x^2 y + e^{x^3} \ln x$

$$K'(x)\, e^{x^3} + \cancel{K(x)\, e^{x^3} \cdot 3x^2} = \cancel{3x^2 K(x)\, e^{x^3}} + e^{x^3} \ln x$$

$$K'(x)\, \cancel{e^{x^3}} = \cancel{e^{x^3}} \ln x$$

$$K'(x) = \ln x$$

$$K(x) = \int \ln x \, dx$$

$$= \int \underbrace{1}_{f'} \cdot \ln x \, dx$$

$$= x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx$$

$$= x \ln x - \int 1 \, dx$$

$$= x \ln x - x + C$$

$$\bar{y}(x) = (x \ln x - x)\, e^{x^3}$$

- La sol. generale dell' eq. differenziale è

$$y(x) = y_0(x) + \bar{y}(x)$$

$$= K e^{x^3} + (x \ln x - x)\, e^{x^3}$$

$$= e^{x^3} (K + x \ln x - x)$$

- Determiniamo K usando $y(1) = 2e$

$$y(1) = e^1 (K + 0 - 1) = e(K-1)$$

Vogliamo $\cancel{e}(K-1) = 2\cancel{e}$

$$K - 1 = 2$$

$$K = 3$$

$$y(x) = e^{x^3} (3 + x \ln x - x)$$

3) $y' = 2y + e^{5x}$

Eq. lineare di I ordine non omogenea

$a(x) = 2 \quad , \quad g(x) = e^{x}.$

- Eq. omogenea associata $y' = 2y$

  $a(x) = 2$

  $\int 2\, dx = 2x + C \qquad A(x) = 2x$

  $y_0(x) = K e^{2x}.$

- Cerchiamo una soluzione particolare

  $\bar{y}(x) = K(x)\, e^{2x}$

  Imponiamo che $\bar{y}$ risolva $y' = 2y + e^{5x}$

  $\bar{y}'(x) = K'(x)\, e^{2x} + K(x)\, e^{2x} \cdot 2$

  Vogliamo

$$K'(x)\, e^{2x} + \cancel{K(x)\, e^{2x}} \cdot 2 = 2\cancel{K(x)\, e^{2x}} + e^{5x}$$

$$K'(x)\, e^{2x} = e^{5x}$$

$$K'(x) = e^{3x}$$

$$K(x) = \int e^{3x} dx = \frac{1}{3} e^{3x} + C$$

$$\bar{y}(x) = \frac{1}{3} e^{3x} \cdot e^{2x} = \frac{1}{3} e^{5x}.$$

- <u>Conclusione</u>: $y(x) = y_0(x) + \bar{y}(x)$

$$= K e^{2x} + \frac{1}{3} e^{5x}.$$

<u>Metodo alternativo per trovare $\bar{y}$.</u>

Vogliamo che $\bar{y}$ risolva $y' = 2y + \underbrace{e^{5x}}_{g(x)}.$]

$g(x) = e^{5x}$ cerchiamo $\bar{y}$ come un esponenziale dello stesso tipo (metodo di somiglianza):

$$\bar{y}(x) = C e^{5x}$$
$$\bar{y}'(x) = 5C e^{5x}$$

$\bar{y}$ risolve l'equazione se e solo se:

$$5C\cancel{e^{5x}} = 2C\cancel{e^{5x}} + \underset{1}{\cancel{e^{5x}}}$$
$$5C = 2C + 1$$
$$3C = 1$$
$$C = \frac{1}{3}$$
$$\bar{y}(x) = \frac{1}{3} e^{5x}.$$

Metodo di similarità / somiglianza per trovare $\bar{y}$.

Supponiamo di voler risolvere $y' = ay + g(x)$ con $\boxed{a \in \mathbb{R}}$. Allora:

1) Se $a \neq 0$ e $g(x)$ è un polinomio di grado n, allora si può cercare $\bar{y}(x)$ come un polinomio di grado $\leq n$.

2) Se $g(x) = e^{\alpha x}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$.
   - Se $\alpha \neq a$, $\bar{y}(x) = C e^{\alpha x}$.
   - Se $\alpha = a$, $\bar{y}(x) = C e^{\alpha x} x$.

3) Se $g(x) = e^{\alpha x} p(x)$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ e p polinomio di grado n.

- Se $\alpha \neq a$, allora $\bar{y}(x) = e^{\alpha x} \cdot q(x)$ con q polinomio di grado $\leq n$.
- Se $\alpha = a$, allora $\bar{y}(x) = e^{\alpha x} q(x) \, x$ con q polinomio di grado $\leq n$.

4) Se $g(x) = p(x) \cos \beta x$ o $g(x) = p(x) \sin \beta x$ con p polinomio di grado n e $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, allora $\bar{y}(x) = q_1(x) \cos \beta x + q_2(x) \sin \beta x$ con q_1, q_2 polinomi di grado $\leq n$.

5) Se $g(x) = e^{\alpha x} \cos(\beta x) \, p(x)$ o $e^{\alpha x} \sin(\beta x) \, p(x)$ con $\beta \neq 0$. Allora:
$\bar{y}(x) = q_1(x) e^{\alpha x} \cos \beta x + q_2(x) e^{\alpha x} \sin \beta x$
con q_1, q_2 polinomi di grado $\leq \deg p$.

ESEMPI

1) $y' = 2y + 3x$

- Risolviamo l'eq. omogenea $y' = 2y$.

$a(x) = 2 \quad \Rightarrow \quad A(x) = 2x$

$y_0(x) = Ke^{2x}$

- Cerchiamo $\bar{y}$.

$g(x) = 3x$ polinomio di grado 1.

Cerchiamo $\bar{y}(x)$ come un polinomio di grado ≤ 1. Cioè:

$\bar{y}(x) = Ax + B.$

$\bar{y}'(x) = A.$

Quindi $\bar{y}$ risolve l'eq. $y' = 2y + 3x$ se e solo se:

$$A = 2(Ax+B) + 3x$$

$$A = 2Ax + 2B + 3x$$

$$0 = 2Ax + 3x + 2B - A$$

$$\begin{cases} 2A + 3 = 0 \\ 2B - A = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\frac{3}{2} \\ B = \frac{A}{2} = -\frac{3}{4} \end{cases}$$

$$\bar{y}(x) = -\frac{3}{2}x - \frac{3}{4}.$$

- Conclusione: Soluzione generale dell'eq. completa:

$$y(x) = y_0(x) + \bar{y}(x) = Ke^{2x} - \frac{3}{2}x - \frac{3}{4}.$$

2) $y' = 2y + \cos 2x$

- Risolviamo $y' = 2y$

$$y_0(x) = Ke^{2x}.$$

- Cerchiamo $\bar{y}(x)$.

$$g(x) = \cos 2x$$

$$\bar{y}(x) = A\cos 2x + B\sin 2x$$

$$\bar{y}'(x) = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x$$

Quindi $\bar{y}$ risolve l'equazione $\Leftrightarrow$

$$-2A\sin 2x + 2B\cos 2x = 2\left(A\cos 2x + B\sin 2x\right) + \cos 2x$$

$$-2A\sin 2x + 2B\cos 2x = 2A\cos 2x + 2B\sin 2x + \cos 2x$$

$$0 = -2B\cos 2x + 2A\cos 2x + \cos 2x$$
$$+ 2A\sin 2x + 2B\sin 2x$$
$$0 = \cos 2x\ (-2B + 2A + 1)$$
$$+ \sin 2x\ (2A + 2B)$$

$$\begin{cases} -2B + 2A + 1 = 0 \\ 2A + 2B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4A + 1 = 0 \\ B = -A \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = -\frac{1}{4} \\ B = \frac{1}{4} \end{cases} \qquad \bar{y}(x) = -\frac{1}{4}\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x$$

- <u>Conclusione</u>: la sol. generale dell'equazione completa è $\bar{y}(x) = Ke^{2x} - \frac{1}{4}\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x$.

3) $y' + y = xe^{-x}$

$y' = -y + xe^{-x}$

Eq. lineare di I ordine con $a(x) = -1$

e $g(x) = xe^{-x}$

- Si risolve $y' = -y$.

  $a(x) = -1 \qquad \int -1\,dx = -x + c$

  Quindi $y_0(x) = Ke^{-x}$.

- Cerchiamo $\bar{y}(x)$ con il metodo di similarità.

  $g(x) = xe^{-x}$ (polinomio di 1° grado per e^{-x})

  $\bar{y}(x) = (Ax + B)e^{-x}$ $\otimes$ compare perché e^{-x} è lo stesso esponenziale che compare in $y_0(x)$.

  $\bar{y}(x) = (Ax^2 + Bx)e^{-x}$

$$\bar{y}'(x) = (2Ax+B)e^{-x} + (Ax^2+Bx)e^{-x}\cdot(-1)$$
$$= e^{-x}(2Ax+B-Ax^2-Bx)$$
$$= e^{-x}(-Ax^2+2Ax-Bx+B).$$

$\bar{y}$ risolve l'equazione se e solo se:

$$\cancel{e^{-x}}(-Ax^2+2Ax-Bx+B) = -(Ax^2+Bx)\cancel{e^{-x}} + x\cancel{e^{-x}}$$
$$-\cancel{Ax^2} + 2Ax - \cancel{Bx} + B = -\cancel{Ax^2} - \cancel{Bx} + x$$

Allora $2Ax + B = x$

$$\begin{cases} 2A = 1 \\ B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ B = 0 \end{cases}$$

$$\bar{y}(x) = (Ax^2+B)e^{-x} = \frac{1}{2}x^2e^{-x}$$

- <u>Conclusione</u>: la soluzione generale dell'eq completa è

$$y(x) = Ke^{-x} + \frac{1}{2}x^2e^{-x}.$$

Per determinare $\bar{y}$ abbiamo visto due metodi:

- **Variazione delle costanti:**

✓ Si può applicare sempre

☹ Si devono calcolare degli integrali

- **Similarità:**

☹ Si può applicare solo quando $a(x)$ è costante e $g(x)$ ha una forma specifica

✓ Quando si può applicare è più rapido.

OSS

Se a è costante, la soluzione dell'eq. omogenea $y' = a y$ è

$$y(x) = K e^{ax}$$

Notiamo che $y' - a y = 0$. Il polinomio

$$p(\lambda) = \lambda - a$$

ha a come unica radice.

Equazioni lineari di II ordine a coefficienti costanti.

$$a y'' + b y' + c y = g(x)$$

con $a, b, c \in \mathbb{R}$.

- L'eq. si dice OMOGENEA se $g(x) = 0$.
- Si dice NON OMOGENEA / COMPLETA se $g(x) \neq 0$

Per le equazioni omogenee:

Def: Il polinomio $p(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c$ è detto POLINOMIO CARATTERISTICO DELL'EQUAZIONE.

OSS Se $\lambda \in \mathbb{R}$ è una radice di $p(\lambda)$ allora $y(x) = e^{\lambda x}$ è una soluzione dell'eq. omogenea

$$a y'' + b y' + c y = 0.$$

DIM

$$y(x) = e^{\lambda x}$$

$$y'(x) = \lambda e^{\lambda x}$$

$$y''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x}$$ quindi:

$$a y'' + b y' + c y = a\lambda^2 e^{\lambda x} + b \lambda e^{\lambda x} + c e^{\lambda x}$$

$$= e^{\lambda x}(a\lambda^2 + b\lambda + c) = 0$$