

Equazioni differenziali a variabili separate.

$$y' = a(x) b(y),$$

dove $a : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, I intervallo, a continue (*)

$b : J \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, J intervallo, b d.

der. C^1 (cioè derivabile con derivata prima
continua) (**)

Teorema di ESISTENZA E UNICITÀ

Nelle ipotesi (*) e (**), siano $x_0 \in I$ e $y_0 \in J$

Allora $\exists \underline{I}_0 \subset I$, $\underline{I}_0$ intervallo t.c.

$$\begin{cases} y' = a(x) b(y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

PROBLEMA DI
CAUCHY

encontrar una única solución

$$\begin{cases} y \cdot y' = 1 \\ y(2) = 2 \end{cases}$$

l'equation différentielle

$$| y \cdot y' = 1 |$$

à variable séparable

$$y' = \frac{1}{y}$$

$$y \neq 0$$

$$b(y) = \frac{1}{y} \quad a(x) = 1$$

$$\underbrace{\int y \cdot y' dx}_{\text{"}} = \int 1 dx = x + C$$

$$y' dx = dy$$

$$\frac{y^2}{2} = \int y dy = x + C$$

$$\frac{1}{2} y^2 = x + C$$

$$y(0) = 2$$

$$\frac{1}{2} \underbrace{y^2(0)} = 0 + C$$

$$\frac{1}{2} 2^2 = C \Rightarrow \frac{y}{2} = C \Rightarrow \boxed{C = 2}$$

Also $\frac{1}{2} y^2 = x + 2 \Rightarrow y^2 = 2(x + 2)$

$$\Rightarrow y = \pm \sqrt{2(x+2)}, \quad x+2 \geq 0, \quad x \geq -2$$

Scelgo il segno positivo perché

$$y(0) = 2 > 0$$

Allora

$$y(x) = \sqrt{2(x+2)}$$

(sceglierò
 $y(x) = + \sqrt{2(x+2)}$)

$$x \geq -2$$

Determino le soluzioni di

$$y' = 2x \sqrt{1-y^2}$$

$$a(x) = 2x$$

$$b(y) = \sqrt{1-y^2}$$

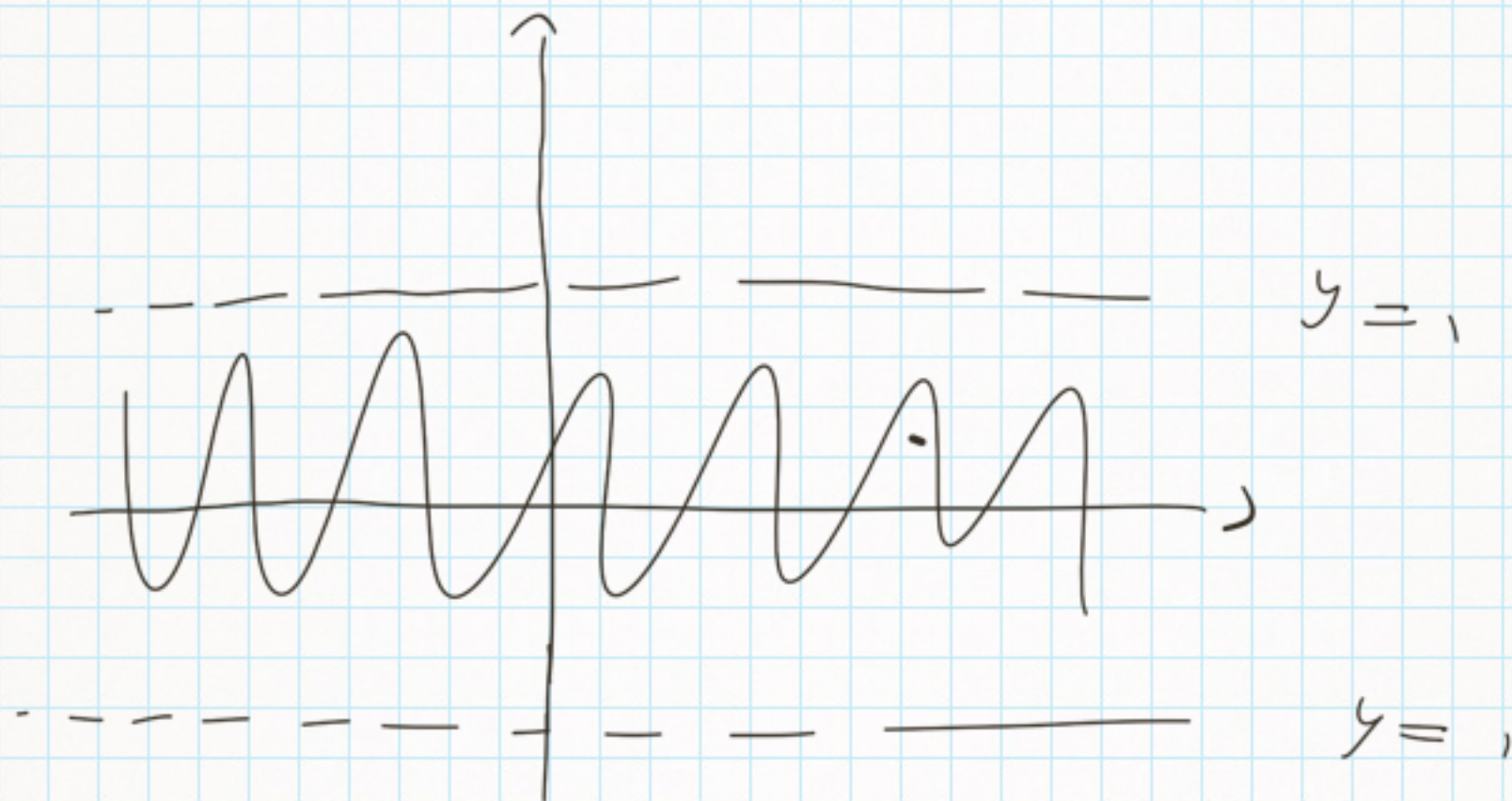
Per prime cose bisogna stabilire le
soluzioni di equilibrio ($b(y) = 0$)

$$1-y^2 = 0$$

$$y = 1 \vee y = -1$$

Il dominio si trova $b(y) = \sqrt{1-y^2}$

$$1-y^2 \geq 0, \quad y^2 \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad -1 \leq y \leq 1$$



Risoluzione

$$y' = 2x \sqrt{1-y^2}$$

$$y \neq 1, y \neq -1$$

Dividiamo entrambi i membri per $\sqrt{1-y^2}$

$$\frac{y'}{\sqrt{1-y^2}} = 2x$$

Integriamo entrambi i membri.

$$\int \frac{y'}{\sqrt{1-y^2}} dx = \int 2x dx = x^2 + c$$

$$y' dx = dy$$

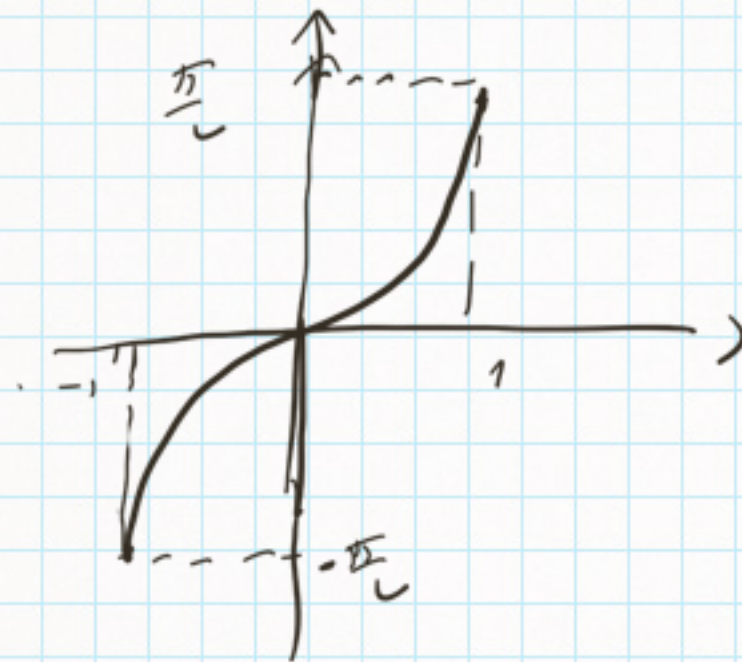
$$\int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = x^2 + c$$

$$\text{or} \sin y = x^2 + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} dy =$$

$$\text{or} \sin y + c$$

$$\arcsin : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$$



$$\arcsin y = \underbrace{x^2 + c}$$

$$\underbrace{-\frac{\pi}{2} \leq x^2 + c \leq \frac{\pi}{2}}$$

$$y = \sin(x^2 + c), \quad \text{ou} \quad x^2 + c \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$$

Le solutions dell'equazione differenziale sono

$$y = 1, \quad y = -1, \quad y = \sin(x^2 + c), \quad x^2 + c \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$$

$$\begin{cases} y y' = x(4-y^2) \\ y(0) = \sqrt{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y' = x \left(\frac{4-y^2}{y} \right) \\ y(0) = \sqrt{3} \end{cases}$$

$$y \neq 0$$

Il problema di Cauchy ha infinite soluzioni

$$y' = x \left(\frac{4-y^2}{y} \right)$$

$$b(y) = \frac{4-y^2}{y}$$

$$4-y^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$a(x) = x$$

$$y = 2 \vee y = -2$$

$$y = 2 \vee y = -2$$

Soluzioni di equilibrio
dell'equazione differenziale

non sono soluzioni del problema di Cauchy

puisque $y(0) = \sqrt{3}$

Récrivons l'équation différentielle en
 $y' \neq \pm 2$

$$y y' = x(4 - y^2)$$

$$\frac{y}{4 - y^2} y' = x$$

Intégrons

$$\int \frac{y}{4 - y^2} \underbrace{(y' dx)}_{= dy} = \int x dx = \frac{x^2}{2} + C$$

$$y' dx = dy$$

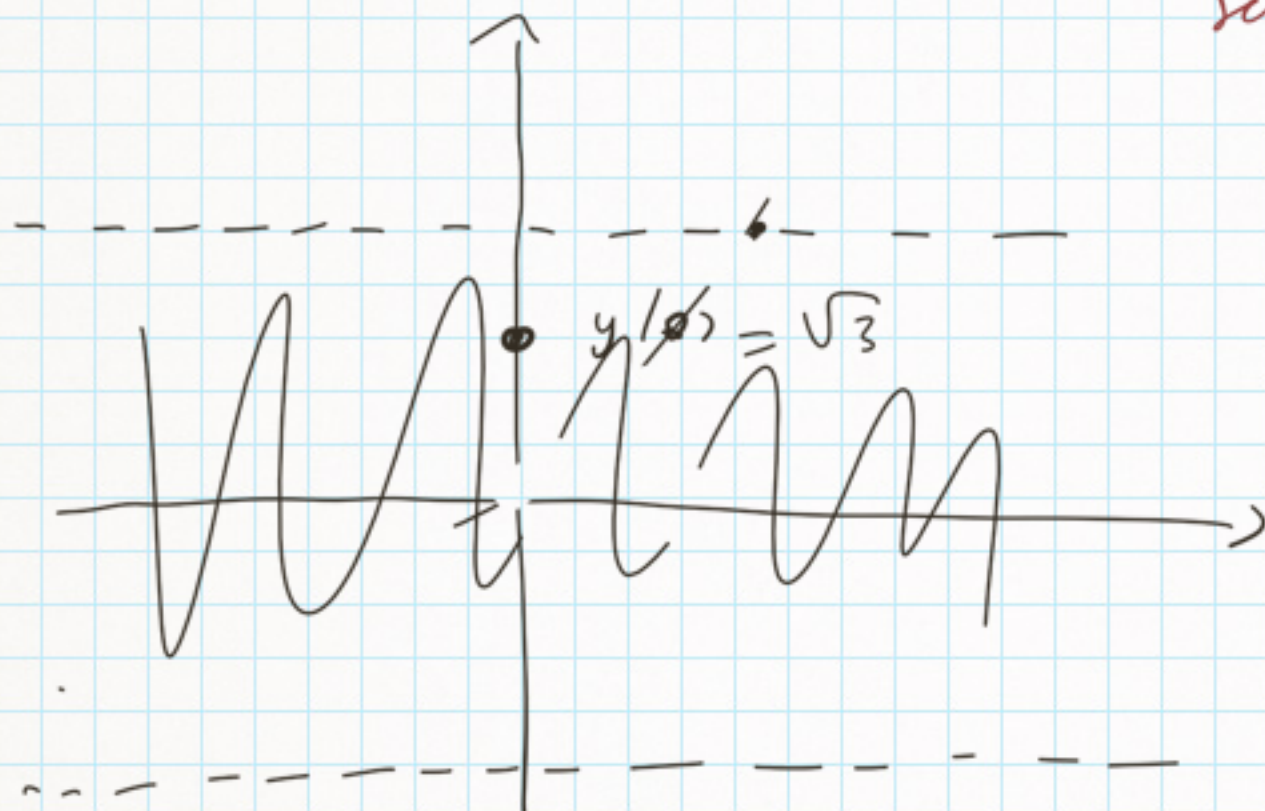
$$\int \frac{y}{4 - y^2} dy = -\frac{1}{2} \int \frac{-2y}{4 - y^2} dy =$$

$$= -\frac{1}{2} \ln |4-y^2| \quad \text{Allora}$$

$$-\frac{1}{2} \ln |4-y^2| = \frac{x^2}{2} + C$$

$$\ln |4-y^2| = -x^2 + C$$

(continuando a chiedere
le costanti C per
simplificare il calcolo)



$$y = 2$$

$$-2 < y < 2$$

$$y = -2$$

$$4 - y^2 > 0 \quad (\Rightarrow) \quad -4 + y^2 < 0 \quad (\Leftrightarrow)$$

$$y^2 - 4 < 0 \quad (\Rightarrow) \quad \underbrace{-2 < y < 2}$$

Also $|4 - y^2| = 4 - y^2$ weil $u \rightarrow 0$
 $\hookrightarrow$

R, (o p) toleranz

$$\ln(4 - y^2) = -x^2 + C$$

Also

$$\ln(4 - y^2) = -x^2 + C \quad \Rightarrow \quad e^{\ln(4 - y^2)} = e^{-x^2 + C} = e^{-x^2} \cdot e^C$$

" "

$$4 - y^2(x) = C e^{-x^2}$$

$$y(0) = \sqrt{3}$$

Determiniere C

$$4 - (\sqrt{3})^2 = C e^0 = C$$

$$4 - 3 = C \Rightarrow C = 1$$

Also

$$4 - y^2 = e^{-x^2}$$

$$-y^2 = e^{-x^2} - 4$$

$$y^2 = 4 - e^{-x^2}$$

$$y = \pm \sqrt{4 - e^{-x^2}}$$

(Solve for y and x)

$$y(0) = \sqrt{3}$$

$$y = \sqrt{4 - e^{-x^2}}$$

$$4 - e^{-x^2} \geq 0$$

Risolviemo

$$4 - e^{-x^2} \geq 0$$

$$e^{-x^2} - 4 \leq 0$$

$$e^{-x^2} \leq 4$$

$$\ln(e^{-x^2}) \leq \ln 4$$

$$\underbrace{-x^2}_{\leq 0} \leq \underbrace{\ln 4}_{\geq 0}$$

Allora y è definita in $\mathbb{R}$

è sempre vera

perché

$$0 < e^{-x^2} \leq 1$$

quindi

$$4 - e^{-x^2} \geq 0$$

sempre vero

Risolvere

$$y' = \frac{2xy}{x^2 - 1}$$

e risolvere

$$(1) \begin{cases} y' = \frac{2xy}{x^2 - 1} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} y' = \frac{2xy}{x^2 - 1} \\ y(0) = 3 \end{cases}$$

$$a(x) = \frac{2x}{x^2 - 1}$$

$$b(y) = y$$

$y = 0$ è soluzione di equazione. ed è soluzione
del problema di Cauchy (1)

Résolution

$$y' = \frac{2xy}{x^2 - 1}$$

$$y \neq 0$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{2x}{x^2 - 1}$$

$$\int \frac{y'}{y} dx = \int \frac{2x}{x^2 - 1} dx$$

$$y' dx = dy$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{2x}{x^2 - 1} dx = \ln |x^2 - 1| + C$$

$$\ln |y| = \ln |x^2 - 1| + C$$

$$e^C = C$$

$$e^{\ln |y|} = e^{\ln |x^2 - 1| + C} = e^{\ln |x^2 - 1|} \cdot e^C = C |x^2 - 1|$$

Altre

$$C = c > 0$$

$$|y| = C|x^2 - 1|$$

Le soluzioni dell'equazione differenziale non
di equilibrio

$$y = K(x^2 - 1)$$

$$K \in \mathbb{R}$$

Le costanti "in globo" il segno di y e
 $(x^2 - 1)$

Il problema di Cauchy $\bar{x} \quad y(0) = 3$

$$3 = K(0 - 1) \Rightarrow K = -3$$

$$\boxed{y(x) = -3(x^2 - 1)}$$

$$\begin{cases} y' = \frac{y^2 - 1}{x^2 - 1} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

$$x^2 - 1 \neq 0, \quad x \neq \pm 1$$



$$x_0 = 0 \quad y_0 = 0$$

$$y' = \frac{y^2 - 1}{x^2 - 1}$$

Le soluzioni costanti sono

$$y^2 - 1 = 0 \Rightarrow y = \pm 1$$

non sono soluzioni sul problema di Cauchy,

perché $y(0) = 0$

Allora risolviamo l'equazione differenziale ma se
consideriamo le soluzioni costanti

Dividiamo per $y^2 - 1$

$$\frac{y'}{y^2 - 1} = \frac{1}{x^2 - 1}$$

$$\int \frac{y' dx}{y^2 - 1} = \int \frac{1}{x^2 - 1} dx$$

$$y' dx = dy$$

$$\int \frac{dy}{y^2 - 1} = \int \frac{dx}{x^2 - 1}$$

Risolviamo

$$\int \frac{1}{x^2 - 1} dx$$

$$\int \frac{1}{x^2 - 1} dx \quad \text{c. fe per fração simples,}$$

$$x^2 - 1 = 0 \quad (\Rightarrow) \quad x = \pm 1$$

$$x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$$

$$\frac{1}{x^2 - 1} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 1} = \frac{A(x + 1) + B(x - 1)}{(x - 1)(x + 1)} =$$

$$= \frac{Ax + A + Bx - B}{(x - 1)(x + 1)} = \frac{x(A + B) + A - B}{(x - 1)(x + 1)}$$

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ A - B = 1 \end{cases}$$

$$\boxed{x(A + B) + A - B = 1 + 0 \cdot x}$$

$$\begin{cases} A = -B \\ -2B = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ B = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\frac{1}{x^2 - 1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+1}$$

Integration

$$\int \frac{1}{x^2 - 1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{x-1} dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{x+1} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \ln |x-1| - \frac{1}{2} \ln |x+1| + c$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \ln |x-1| - \ln |x+1| \right\} + c =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right) \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C$$

$$= \ln \sqrt{\left| \frac{x-1}{x+1} \right|} + C$$

$$\bullet \ln f - \ln d =$$

$$= \ln \frac{f}{d}, \quad f, d > 0$$

$$\bullet 2 \ln d = \ln d^2$$

Alle steps noch

$$\int \frac{dy}{y^2 - 1} = \ln \sqrt{\left| \frac{y-1}{y+1} \right|} = \int \frac{1}{x^2 - 1} dx$$

$$= \ln \sqrt{\left| \frac{x-1}{x+1} \right|} + C$$

Alles

$$\ln \sqrt{\left| \frac{y-1}{y+1} \right|} = \ln \sqrt{\left| \frac{x-1}{x+1} \right|} + C$$

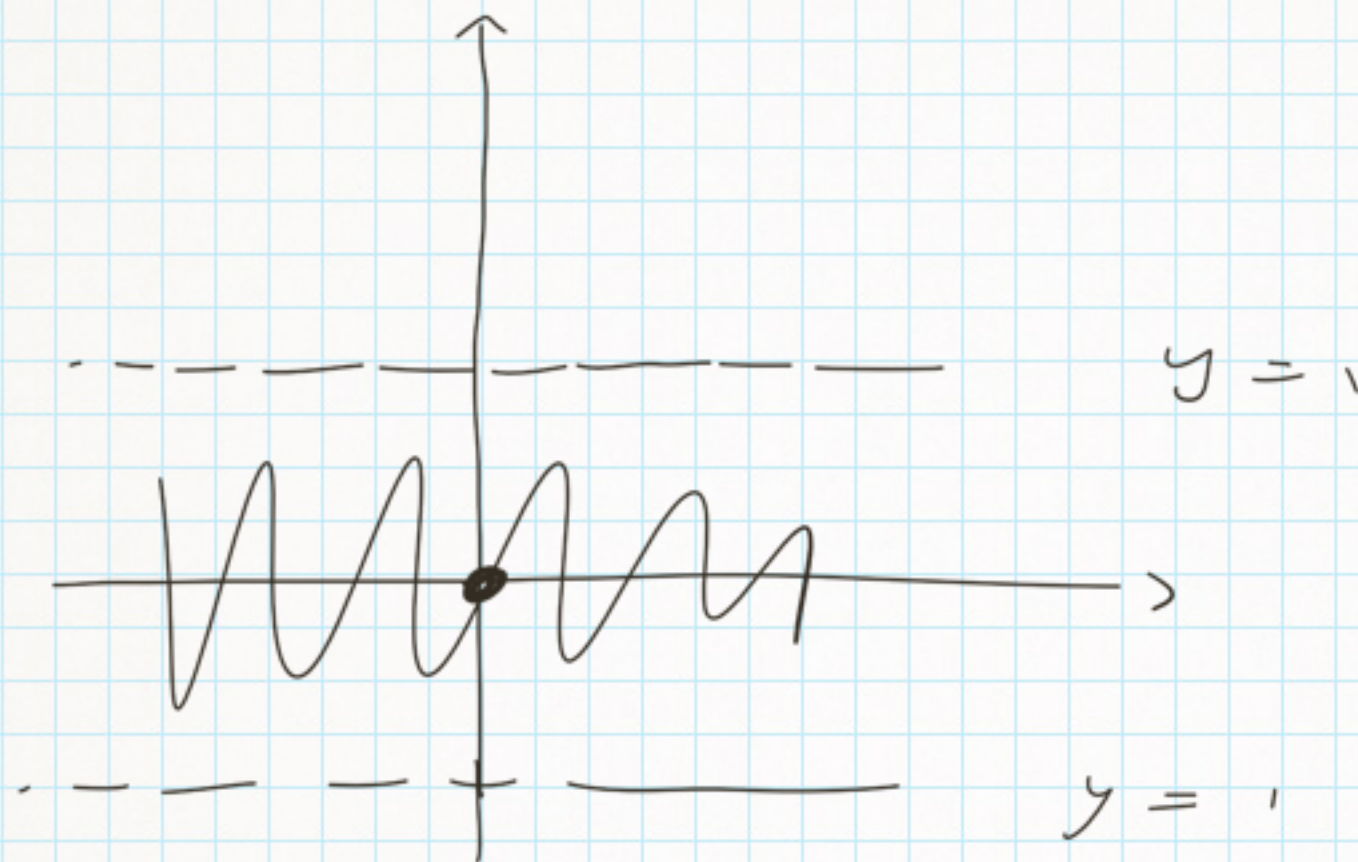
$y(0) = 0$. Substitution

$$\ln \sqrt{\left| \frac{0-1}{0+1} \right|} = \ln \sqrt{\left| \frac{0-1}{0+1} \right|} + C$$

$$\underset{0}{\overset{1}{\ln 1}} = \underset{0}{\overset{1}{\ln 1}} + C \Rightarrow C = 0$$

Per il problema si' conchi

$$\ln \sqrt{\left| \frac{y-1}{y+1} \right|} = \ln \sqrt{\left| \frac{x-1}{x+1} \right|}$$



$$-1 < y < 1 \Rightarrow \frac{y-1}{y+1} < 0 \Rightarrow \left| \frac{y-1}{y+1} \right| =$$

$$= - \frac{y-1}{y+1} = \frac{1-y}{y+1}$$

Nel nostro caso $-1 < x < 1$, quindi $\left| \frac{x-1}{x+1} \right| =$

$$= \frac{1-x}{x+1}$$

Allora

...

$$\ln \sqrt{\frac{1-y}{y+1}} = \ln \sqrt{\frac{1-x}{x+1}}$$

$\Downarrow$

$$\sqrt{\frac{1-y}{y+1}} = \sqrt{\frac{1-x}{x+1}}$$

$\Downarrow$

$$\frac{1-y}{y+1} = \frac{1-x}{x+1}$$

$\Downarrow$

$$x=y \quad (\text{si può vederlo facilmente})$$

$$y = y(x)$$

14 febbraio

$$\frac{1-y}{y+1} = \frac{1-x}{x+1} \Leftrightarrow (1-y)(x+1) = (1-x)(y+1)$$

$$\Leftrightarrow x+1 - xy - y = y+1 - xy - x$$

$$(=) \quad x - y = y - x \quad (=) \quad 2x = 2y$$

$$(=) \quad x = y$$

∠' unique solution is

$$y(x) = x$$

$$y' = x^2 (y^2 - 4)$$

(2 case)

