MATEMATICA - LEZIONE 30

mercoledì 19 novembre 2025 09:05

Def: Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo. Sia $k \in \mathbb{N}$ $k \geq 1$. Se f è derivabile $k-1$ volte in I e la derivata $(k-1)$-esima è derivabile in un punto $x_0 \in I$, si dice che f è derivabile k volte in I e la derivata $(k-1)$-esima in x_0 è detta derivata k-esima di f in x_0.

(Si indica con $f^{(k)}(x_0)$, $\frac{d^k f}{dx^k}(x_0)$, $D^k f(x_0)$ o $f^{\overbrace{''\cdots'}^{k \text{ volte}}}(x_0)$)

ESEMPIO

$$f(x) = e^{2x} + x^4$$

$$f'(x) = 2e^{2x} + 4x^3$$

$$f''(x) = 4e^{2x} + 12x^2$$

$$f'''(x) = 8e^{2x} + 24x$$

$$f^{(4)}(x) = 16e^{2x} + 24$$

$$f^{(5)}(x) = 32e^{2x}$$

$$f^{(k)}(x) = 2^k e^{2x} \quad \text{se} \quad k \geq 5$$

Def (Fattoriale di un numero naturale)

Sia $n \in \mathbb{N}$, chiamiamo FATTORIALE di n il numero intero $n!$ definito da

$$m! = \begin{cases} m(m-1)\cdot(m-2)\cdot \ldots \cdot 2\cdot 1 & \text{se } m \geq 1 \\ 1 & \text{se } m = 0 \end{cases}$$

ESEMPI

$0! = 1$

$1! = 1$

$2! = 2\cdot 1 = 2$

$3! = 3\cdot 2\cdot 1 = 6$

$4! = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 24$

$5! = 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 5\cdot 4! = 5\cdot 24 = 120$

$6! = 6\cdot 120 = 720$

OSS

$\forall m \in \mathbb{N}: \quad (m+1)! = (m+1)\cdot m!$

OSS

$f(x) = x^m$

$f'(x) = m\, x^{m-1}$

$f''(x) = m(m-1)\, x^{m-2}$

$\vdots$

$f^{(m)}(x) = m(m-1)\cdot \ldots \cdot 2\cdot 1 = m!$

In generale

$D^m x^m = m!$

$D^k x^m = 0 \quad \text{se } k > m$

$D^k x^m = \dfrac{m!}{(m-k)!}\, x^{m-k}$

OSS

$$D^k (x-x_0)^m = \begin{cases} m! & \text{se } k = m \\ 0 & \text{se } k > m \\ \dfrac{m!}{(m-k)!}(x-x_0)^{m-k} & \text{se } k < m \end{cases}$$

Simboli di sommatoria e produttoria

Def Siano $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ e sia $f : \mathbb{Z} \cap [k_1, k_2] \to \mathbb{R}$.
$(k_1 \leq k_2)$

Definiamo:

$$\sum_{k=k_1}^{k_2} f(k) := f(k_1) + f(k_1+1) + f(k_1+2) + \ldots + f(k_2) \quad \text{(SIMBOLO DI SOMMATORIA)}$$

$$\prod_{k=k_1}^{k_2} f(k) := f(k_1) \cdot f(k_1+1) \cdot f(k_1+2) \cdot \ldots \cdot f(k_2) \quad \text{(SIMBOLO DI PRODUTTORIA)}$$

ESEMPI

$$\sum_{k=2}^{5} \frac{1}{k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$$

$$\sum_{k=2}^{m} \frac{1}{k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{m}$$

$$\sum_{k=-1}^{2} 2^k = 2^{-1} + 2^0 + 2^1 + 2^2 = \frac{1}{2} + 1 + 2 + 4$$

$$\cancel{\sum_{k=-2}^{2} \frac{1}{k}} = \left(\frac{1}{-2} + \frac{1}{-1} + \cancel{\frac{1}{0}} + \frac{1}{1} + \frac{1}{-2} \right)$$

$$\prod_{k=2}^{4} k^2 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2$$

$$\prod_{k=1}^{m} k = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot m = m! \quad \text{se } m \geq 1.$$

Simboli di Landau. ("o piccolo" e "O grande")

Def. Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo. Siano $f, g : I \to \mathbb{R}$. e $x_0 \in I$. Supponiamo che $g(x) \neq 0 \ \forall x \in I \setminus \{x_0\}$.
Si scrive che $f(x) = o(g(x))$ per $x \to x_0$ se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

(vicino a x_0 f è più piccola di g).

ESEMPI

- Per $x \to +\infty$: $x = o(e^x)$ $\left(\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \right)$

  $x^2 = o(x^3)$

- Per $x \to 0$: $x^3 = o(x^2)$ $\left(\frac{x^3}{x^2} = x \xrightarrow{x \to 0} 0 \right)$

Per $x \to 0$ $1 - \cos x = o(x)$ perché

Perché $\frac{1-\cos x}{x} = \frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot x \xrightarrow{x \to 0} \frac{1}{2} \cdot 0 = 0.$

Ricordare Se $\boxed{x \to 0}$ e $n > m$ allora
$x^n = o(x^m)$

OSS

- $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \iff \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{1} = 0$

  $\iff f(x) = o(1)$

- $\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}. \iff \lim_{x \to x_0} (f(x) - l) = 0$

  $\iff f(x) - l = o(1)$

$$\iff f(x) = L + o(1)$$

PROPRIETÀ DEI SIMBOLI DI LANDAU

1) Se $c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ $\quad c\, o(f(x)) = o(f(x))$

$$o(c f(x)) = o(f(x))$$

In particolare $\quad -o(f(x)) = o(f(x))$

$$o(-f(x)) = o(f(x))$$

2) $o(f(x)) + o(f(x)) = o(f(x))$

3) $g(x)\, o(f(x)) = o(g(x) f(x))$

4) $o(f(x)) \cdot o(g(x)) = o(f(x) g(x))$

5) $o(o(f(x))) = o(f(x))$

Per $x \to 0$

$$x^2 + x^4 = x^2 + o(x^2) \qquad \left(x^4 = o(x^2) \text{ per } x \to 0 \right)$$

(Per $x \to 0$ contano di più le potenze più basse)

OSS 2

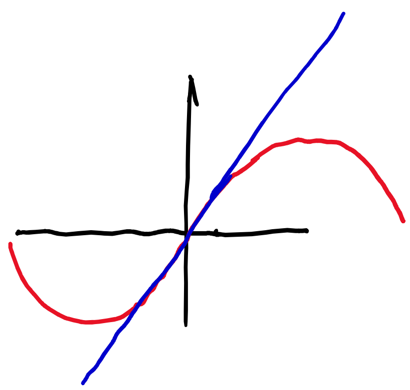
I limiti notevoli si riscrivono usando i simboli di Landau

- $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

cioè $\quad \frac{\sin x}{x} = 1 + o(1)$

$$\sin x = x(1 + o(1))$$

$$\sin x = x + o(x)$$



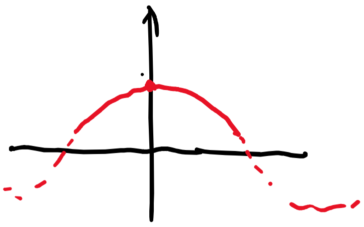
- $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

$$\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2} + o(1)$$

$$1 - \cos x = \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$

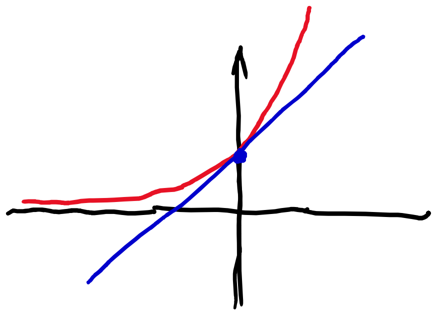
$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 - o(x^2)$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$



- $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$$e^x = 1 + x + o(x)$$



Def Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e siano $f, g : I \to \mathbb{R}$. Si scrive che $f(x) = O(g(x))$ in I se $\exists\, c \in \mathbb{R}$, $c > 0$ t.c. $|f(x)| \leq c\,|g(x)|$ $\forall x \in I$.

Polinomi di Taylor.

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $f : I \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in I$. Supponiamo f derivabile n volte in x_0. Definiamo POLINOMIO DI TAYLOR DI ORDINE $n \in \mathbb{N}$ E CENTRO x_0 il polinomio

$$T_{n, x_0, f}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

$$= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \dots$$

$$+ \dots + \frac{1}{m!} f^{(m)}(x_0)(x-x_0)^m.$$

OSS $T_{m,x_0,f}(x)$ è l'unico polinomio di grado $\leq m$ tale che $T^{(k)}_{m,x_0,f}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$ $\forall\, 0 \leq k \leq m$.

TEOREMA DI PEANO (FORMULA DI TAYLOR CON RESTO DI PEANO)

Sia I un intervallo e siano $f: I \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in I$ tale che f è derivabile m volte in x_0.

Allora

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - T_{m,x_0,f}(x)}{(x-x_0)^m} = 0$$

cioè $f(x) = T_{m,x_0,f}(x_0) + o((x-x_0)^m)$ per $x \to x_0$

Inoltre $T_{m,x_0,f}(x)$ è l'unico polinomio di grado $\leq m$ con questa proprietà.

ESEMPIO

$f(x) = e^x \quad , x_0 = 0$

$f^{(k)}(x) = e^x \quad \forall\, k \in \mathbb{N}$

$f^{(k)}(x_0) = e^0 = 1$

$$T_{m,x_0,f}(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{m} \frac{x^k}{k!}$$

(Per semplicità indichiamolo con T_m)

$T_0(x) = 1$	$e^x = 1 + o(1)$
$T_1(x) = 1 + x$	$e^x = 1 + x + o(x)$
$T_2(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$	$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$
$T_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$	$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$
(Polinomi di Taylor)	(Formule di Taylor)

Applicazione:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} \qquad \left(\frac{e^x-1}{x^2} - \frac{1}{x} = \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to \pm\infty} \underbrace{\left(\frac{e^x-1}{x} - 1 \right)}_{\to 0} \right) \quad \text{f.i.}$$

Formula di Taylor di ordine 2:

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} + \frac{o(x^2)}{x^2} \xrightarrow{} 0 \quad = \frac{1}{2}$$

Nota Con la formula di Taylor di ordine 1 non si riesce a calcolare il limite.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{o(x)}{x^2} \qquad e^x = 1 + x + o(x)$$

$$= \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{o(x)}{x}}_{\to 0} \cdot \frac{1}{x} \nearrow \pm\infty.$$

Polinomi di Taylor di alcune funzioni elementari

1) $f(x) = e^x \quad , \quad x_0 = 0$

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \dots + \frac{1}{n!}x^n.$$

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \dots + \frac{1}{n!}x^n + o(x^n).$$

2) $f(x) = \sin x \quad , \quad x_0 = 0$

$$f'(x) = \cos x \qquad f^{(0)}(0) = 0$$
$$f''(x) = -\sin x \qquad f^{(1)}(0) = \cos 0 = 1$$
$$f^{(3)}(x) = -\cos x \qquad f^{(2)}(0) = 0$$
$$f^{(4)}(x) = \sin x \qquad f^{(3)}(0) = -1$$
$$f^{(4)}(0) = 0$$

$$T_n(x) = 0 + x + 0 - \frac{x^3}{3!} + 0 + \frac{x^5}{5!} + 0 - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

$$T_0(0) = 0 \qquad \sin x = o(1)$$
$$T_1(x) = x \qquad \sin x = x + o(x)$$
$$T_2(x) = x \qquad \sin x = x + o(x^2)$$
$$T_3(x) = x - \frac{x^3}{6} \qquad \sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$
$$T_4(x) = x - \frac{x^3}{6} \qquad \sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$$
$$T_5(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{\underbrace{120}_{5!}} \qquad \sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$$

$$T_{2m+1}(x) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \qquad \forall\, m \in \mathbb{N}.$$

$$T_{2m}(x) = T_{2m-1}(x) \qquad \forall\, m \in \mathbb{N},\ m \geq 1$$

3) $f(x) = \cos x \quad , \quad x_0 = 0$

$$T_n(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \ldots$$

$$T_0(x) = 1 \qquad \cos x = 1 + o(1)$$
$$T_1(x) = 1 \qquad \cos x = 1 + o(x)$$
$$T_2(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 \qquad \cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$
$$T_3(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 \qquad \cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)$$
$$T_4(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 \qquad \cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)$$

$$T_{2m}(x) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

$$T_{2m+1}(x) = T_{2m}(x).$$

4) $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$, $x_0 = 0$

$$T_m(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^m$$
$$= \sum_{k=0}^{m} x^k.$$

5) $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$

$$T_m(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \dots + (-1)^m x^m$$
$$= \sum_{k=0}^{m} (-1)^k x^k$$

6) $f(x) = \ln(1+x)$

$$T_m(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \dots + (-1)^{m+1} \frac{x^m}{m}$$

$$= \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$$

7) $f(x) = \arctan x$

$$T_m(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

cioè

$$T_{2m+1}(x) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

8) $f(x) = (1+x)^{\alpha}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$T_m(x) = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \dots$$

Si definisce $\binom{\alpha}{k} = \begin{cases} \dfrac{\alpha \cdot (\alpha-1) \cdot \ldots \cdot (\alpha-k+1)}{k!} & \text{se } k \geq 1 \\ 1 & \text{se } k = 0 \end{cases}$

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k.$$

ESEMPIO

$$f(x) = \sqrt[3]{1+x}, \quad x_0 = 0$$

$$= (1+x)^{\frac{1}{3}} \qquad \alpha = \frac{1}{3}$$

$$T_2(x) = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2$$

$$= 1 + \frac{1}{3} x + \frac{\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3} - 1\right)}{2} x^2$$

$$= 1 + \frac{1}{3} x - \frac{1}{9} x^2$$

ESERCIZIO

Calcoliamo $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^x - x - \cos x}{2x \sin x}$ f.i. $\frac{0}{0}$

$$\sin x = x + o(x)$$

$$2x \sin x = 2x\,(x + o(x)) = 2x^2 + o(x^2)$$

Usiamo la formula di Taylor di ordine 2

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2} x^2 + o(x^2)$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2} x^2 + o(x^2)$$

$$e^x - x - \cos x =$$

$$\doteq 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) - x - \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right)$$

$$= \cancel{1} + \cancel{x} + \frac{1}{2}x^2 \cancel{-x} \cancel{-1} + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) - o(x^2)$$

$$= x^2 + \underbrace{o(x^2) - o(x^2)}_{=o(x^2)}$$

$$= x^2 + o(x^2)$$

Conclusione $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{x^2 + o(x^2)}{2x^2 + o(x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x^2}\left(1 + \frac{o(x^2)}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}\left(2 + \frac{o(x^2)}{x^2}\right)}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1 + \frac{o(x^2)}{x^2}}{2 + \frac{o(x^2)}{x^2}} = \frac{1}{2}$$