MATEMATICA - LEZIONE 29

lunedì 17 novembre 2025 09:05

TEOREMA (DI DE L'HOPITAL)

Sia I un intervallo. Sia $x_0 \in Dr(I)$ e siano $f, g : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$. derivabili in $I \setminus \{x_0\}$. Assumiamo che:

1) $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$ e $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$

(oppure $\lim_{x \to x_0} f(x) \in \{-\infty, +\infty\}$ e $\lim_{x \to x_0} g(x) \in \{-\infty, +\infty\}$)

2) $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in I \setminus \{x_0\}$

3) $\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \overline{\mathbb{R}}$

Allora $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

ESEMPIO

- $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$ f.i. $\frac{0}{0}$

$$\overset{D.l.H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{1+x} \cdot 1}{1} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{1+x} = 1$$

- $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{(e^x - 1)^2}$ f.i. $\frac{0}{0}$

$$\overset{D.l.H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{2(e^x - 1) \cdot e^x} \quad \text{f.i. } \frac{0}{0}$$

$$\overset{D.l.H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{2\left(e^{2x} + (e^x - 1) e^x\right)} = \frac{1}{2 \cdot 1} = \frac{1}{2}$$

- $\lim_{x \to 0^+} x \ln x$ $\quad 0 \cdot (-\infty)$ f.i.

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \quad \text{f.i. } \frac{-\infty}{+\infty}$$

$$\overset{(D.l.H)}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{1}{x}\cdot x^2 = \lim_{x\to 0^+} -x = 0.$$

Attenzione: Il teorema non si può applicare se il limite $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ non è una forma ind del tipo $\frac{0}{0}$ o $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$.

ESEMPIO

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\sin x}{x} = \frac{\sin\pi}{\pi} = \frac{0}{\pi} = 0$$ (non è una forma indeterminata)

Ma

$$\lim_{x\to\pi} \frac{D\sin x}{Dx} = \lim_{x\to\pi} \frac{\cos x}{1} = \cos\pi = -1.$$

(In questo caso il teorema non può essere applicato perché non vale l'ipotesi 1))

Attenzione 2: Se $\nexists \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ non è detto che $\nexists \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$.

ESEMPIO

f.i. $\frac{+\infty}{+\infty}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\overbrace{x+\sin x}^{\to+\infty}}{\underbrace{x}_{\to+\infty}} = \lim_{x\to+\infty} 1+\frac{\sin x}{x} = 1+0 = 1$$

Ma

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{D(1+\sin x)}{Dx} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cos x}{1} = \lim_{x\to+\infty} \cos x \quad \nexists$$

(il teorema non può essere applicato perché non vale l'ipotesi 3)).

OSS

Se valgono le ipotesi 1) e 2) del Teorema e

$\exists \lim_{x \to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ e $\lim_{x \to x_0^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, allora

$\exists \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ e $\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

(Il teorema si può applicare a limite destro e sinistro).

Applicazione allo studio della derivabilità:

Sia $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$, I intervallo e $x_0 \in I$.
Supponiamo f derivabile in $I \setminus \{x_0\}$ e continua in I.
Per stabilire se f è derivabile in x_0 dobbiamo calcolare:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\underbrace{f(x) - f(x_0)}_{\to 0}}{\underbrace{x - x_0}_{\to 0}} \qquad \text{f.i. } \frac{0}{0}.$$

(f è continua in x_0)

con il teorema di D.L.H

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{1} = \lim_{x \to x_0} f'(x).$$

se l'ultimo limite esiste.

TEOREMA (DEL TAPPABUCHI)

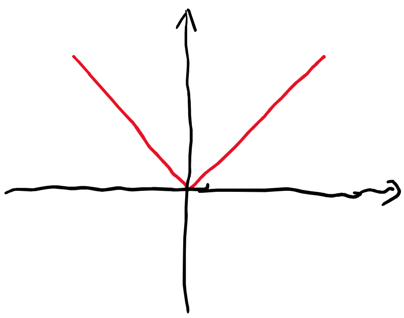
Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in I$.
Supponiamo f continua in I e f derivabile in $I \setminus \{x_0\}$. Allora:

1) Se $x_0 \in D_r^+(I)$ e $\exists \lim_{x \to x_0^+} f'(x)$ allora
$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} f'(x).$$
2) Se $x_0 \in D_r^-(I)$ e $\exists \lim_{x \to x_0^-} f'(x)$ allora
$$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} f'(x).$$
Se $x_0 \in D_r^+(I) \cap D_r^-(x_0)$ e $\exists \lim_{x \to x_0^+} f'(x) = L_1$ e $\lim_{x \to x_0^-} f'(x) = L_2$ con $L_1 = L_2 \in \mathbb{R}$ allora f è derivabile in x_0.
(Se $L_1 \neq L_2$ o $L_1 = L_2 \in \{+\infty, -\infty\}$ allora f non è derivabile in x_0).

ESEMPIO

$f(x) = |x|$

f è continua in $\mathbb{R}$ e derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e
$$f'(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0. \end{cases} \quad \text{se } x \neq 0.$$
E in 0?

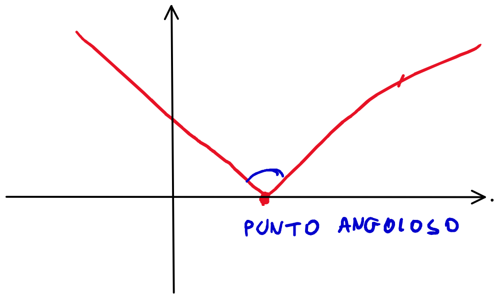


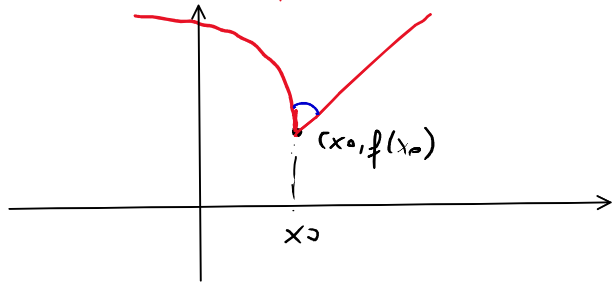
$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} 1 = 1$$
$$f'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^-} -1 = -1.$$
f non è derivabile in $x_0 = 0$.

- Classificazione dei punti di non derivabilità (per funzioni continue).

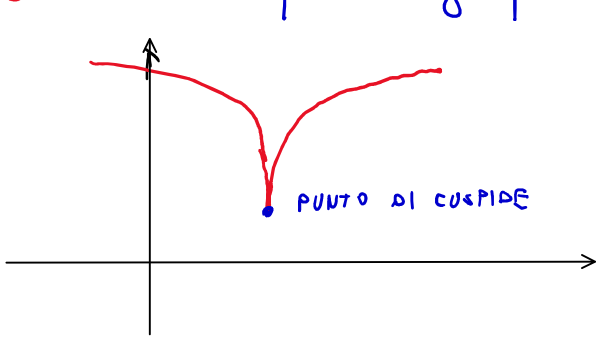
Siano $I \subseteq \mathbb{R}$, I intervallo, $f: I \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in I$.
Supponiamo f continua in I e derivabile in $I \setminus \{x_0\}$.
1) Se x_0 è un punto interno ad I $(x_0 \in D_r^+(I) \cap D_r^-(I))$ e $\exists f'_+(x_0)$ e $f'_-(x_0)$ e almeno uno tra $f'_+(x_0)$ e

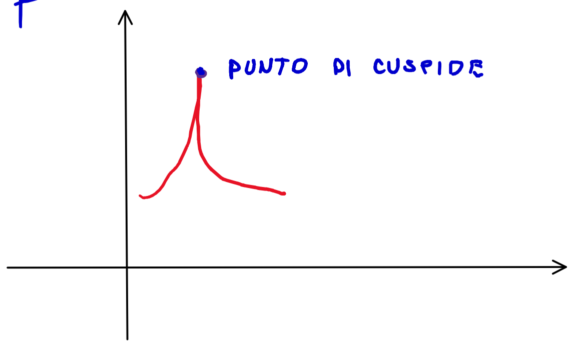
$f'_-(x_0)$ è reale, allora si dice che $(x_0, f(x_0))$ È UN PUNTO ANGOLOSO PER IL GRAFICO DI f



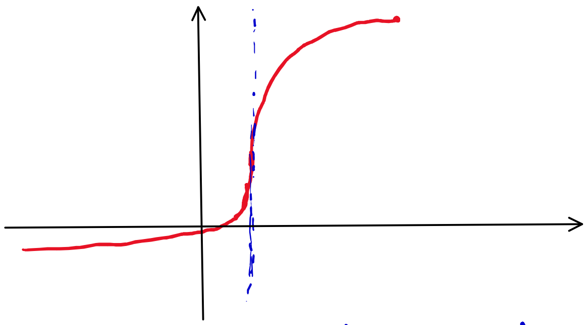


2) Se x_0 è interno ad I, $\exists\, f'_+(x_0), f'_-(x_0) \in \{+\infty, -\infty\}$ e $f'_+(x_0) = -f'_-(x_0)$, si dice che $(x_0, f(x_0))$ È UN PUNTO DI CUSPIDE per il grafico di f





3) Se x_0 è interno ad I e $\exists \lim_{x \to x_0} f'(x) \in \{+\infty, -\infty\}$ si dice che x_0 è un PUNTO DI FLESSO A TANGENTE VERTICALE



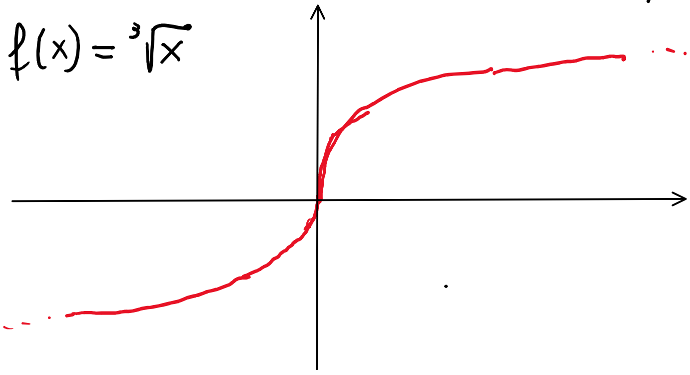
4) Se x_0 è uno degli estremi di I e $\exists \lim_{x \to x_0} f'(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \{-\infty, -\infty\}$ si dice che $(x_0, f(x_0))$ è un PUNTO A TANGENTE VERTICALE

$f(x) = \sqrt{x}$
ha un punto a tangente verticale in $x = 0$.

ESEMPI

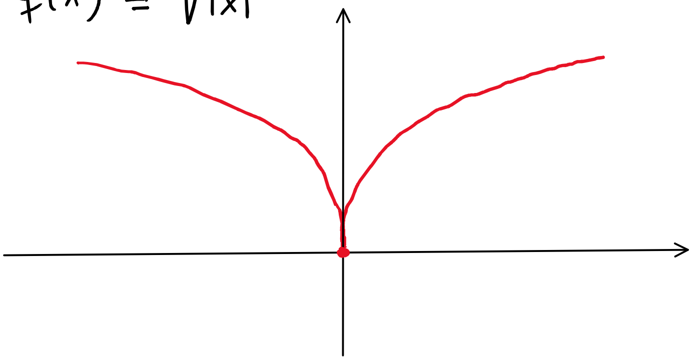
1) $f(x) = |x|$ ha un punto angoloso in $x_0 = 0$
(cioè $(0,0)$ è un punto angoloso per il grafico)

2) $f(x) = \sqrt[3]{x}$



ha un flesso a tangente verticale in $x_0 = 0$.

3) $f(x) = \sqrt{|x|}$



ha una cuspide in 0.

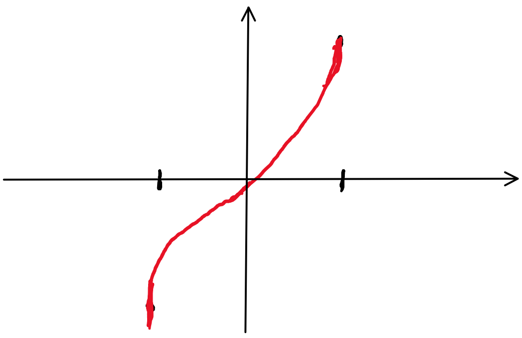
4) $f(x) = \arcsin x$ in $[-1, 1]$

Per $x \in]-1,1[$ f è derivabile e $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\lim_{x \to 1} f'(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -1} f'(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$x = 1$ e $x = -1$ sono punti a tangente verticale



ESERCIZIO

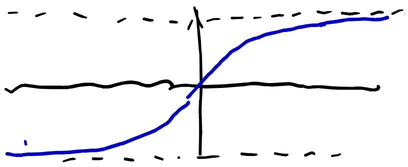
Studiare la funzione $f(x) = \arctan(x e^{-x})$

1) $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$

2) $f(-x) = \arctan(-x\,e^{x}) = -\arctan(x\,e^{x}) \neq -f(x) \wedge \neq f(x)$

f non è pari né dispari

3) Segno e zeri

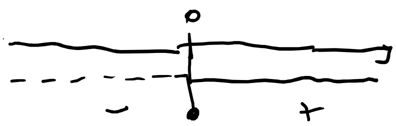


Nota: $\arctan g(x)$ ha lo stesso segno di $g(x)$.

$f(x) > 0 \iff x\,e^{-x} > 0 \iff x > 0$

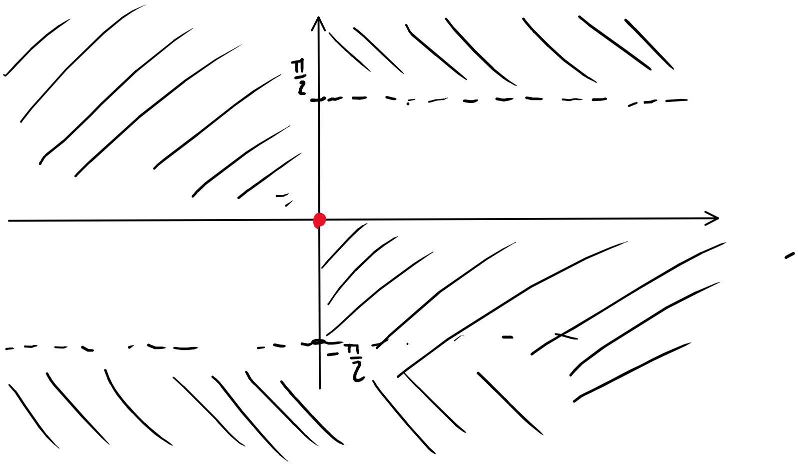
$f(x) < 0 \iff x < 0$

$f(x) = 0 \iff x\,e^{-x} = 0 \iff x = 0$



4) $(0,0)$ è l'unica intersezione del grafico con gli assi.

Inoltre $f(x) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\quad \forall x \in \mathbb{R}$.



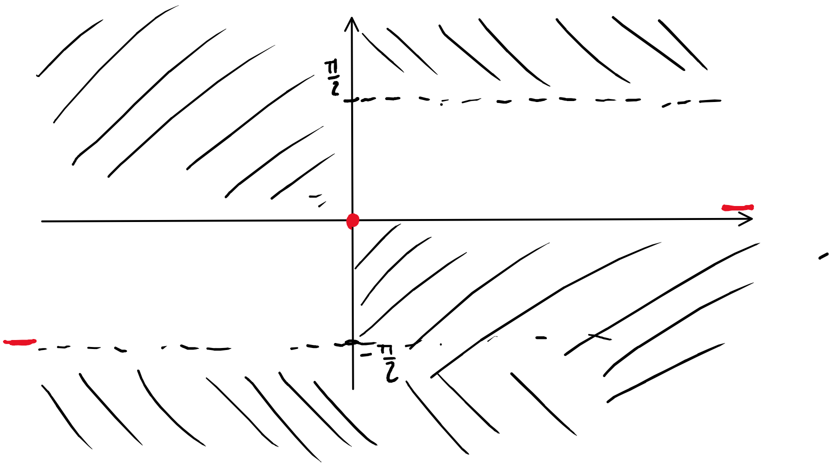
5) $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to -\infty} \arctan(\underbrace{x}_{\to -\infty}\,\underbrace{e^{-x}}_{\to +\infty}) = \text{"}\arctan(-\infty)\text{"} = -\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \arctan(\underbrace{x}_{\to +\infty}\,\underbrace{e^{-x}}_{\to 0})$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \arctan\left(\frac{x}{e^{x}}\right) = \arctan 0 = 0.$$

Le rette $y = -\frac{\pi}{2}$ e $y = 0$ sono asintoti orizzontali (rispettivamente per $x \to -\infty$ e per $x \to +\infty$).



6) Derivata:

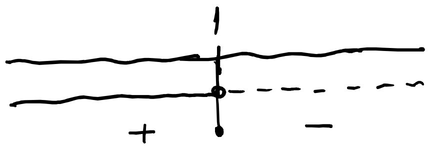
$$f'(x) = D(\arctan(x e^{-x}))$$

$$= \frac{1}{1+(xe^{-x})^2}\, D(x e^{-x})$$

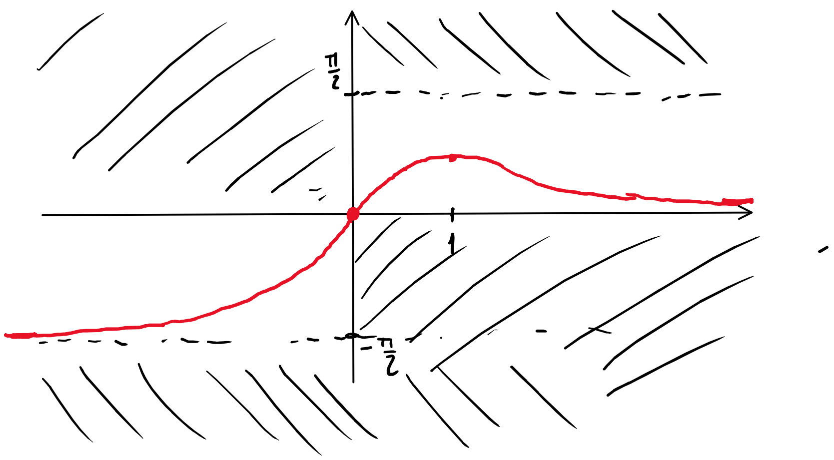
$$= \frac{1}{1+x^2e^{-2x}} \cdot \left(1\cdot e^{-x} + x(-e^{-x})\right)$$

$$= \frac{(1-x)\,\overset{>0}{e^{-x}}}{\underbrace{1+x^2e^{-2x}}_{>0}}$$

7) Segno di f':

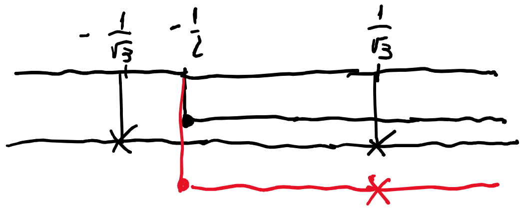


8) $x=1$ è un punto di max locale e $f(1) = \arctan\left(\frac{1}{e}\right)$



ESERCIZIO

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+2x}}{1-3x^2}$$



1) $\mathrm{Dom}(f) = ?$

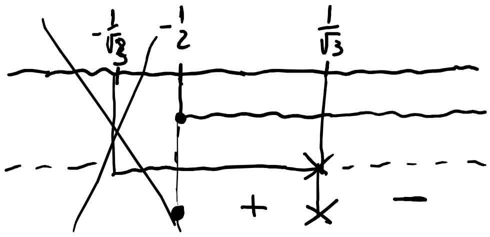
$$\begin{cases} 1+2x \geq 0 & \longrightarrow & x \geq -\frac{1}{2} \\ 1-3x^2 \neq 0 & \longrightarrow & x \neq \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

$$\left(\frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow -\frac{1}{\sqrt{3}} < -\frac{1}{2} \right)$$

$$\mathrm{Dom}(f) = \left[-\tfrac{1}{2}, +\infty\right[\setminus \left\{ \tfrac{1}{\sqrt{3}} \right\}$$
$$= \left[-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{\sqrt{3}}\right[\cup \left]\tfrac{1}{\sqrt{3}}, +\infty\right[.$$

2) Non ci sono simmetrie rispetto a 0 perché il dominio non è simmetrico.

3) $f(x) = \frac{\sqrt{1+2x}}{1-3x^2}$



$$f(x) > 0 \iff -\tfrac{1}{2} < x < \tfrac{1}{\sqrt{3}}$$
$$f(x) < 0 \iff x > \tfrac{1}{\sqrt{3}}$$
$$f(x) = 0 \iff x = -\tfrac{1}{2}$$

4) $(-\frac{1}{2}, 0)$ è l'unica int. con l'asse x.

$f(0) = 1$ quindi $(0,1)$ è l'unica int. con l'asse y.

5) $\lim_{x \to -\frac{1}{2}} f(x) = 0$

$$\lim_{x \to \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^-} f(x) = \lim_{x \to \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^-} \frac{\sqrt{1+2x}}{1-3x^2} = +\infty \qquad \frac{\sqrt{1+\frac{2}{\sqrt{3}}}}{0}$$

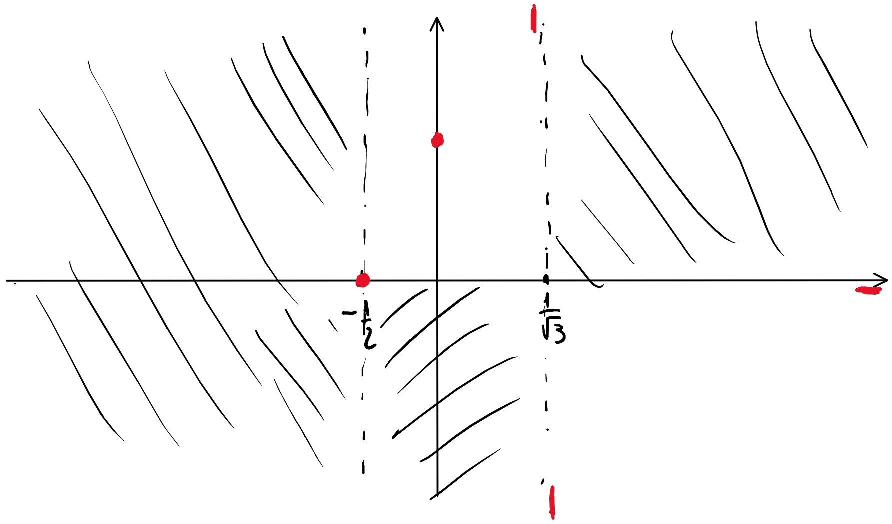
controlliamo il segno di f.

e $\lim_{x \to \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^+} f(x) = -\infty.$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{1+2x}}{1-3x^2} \qquad \frac{+\infty}{-\infty}$$

$$\overset{D.e.H}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{1+2x}} \cdot \cancel{2}}{-6x} = \frac{0}{-\infty} = 0.$$

- $y = 0$ è asint. orizzontale per $x \to +\infty$
- $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ è asint. verticale destro e sinistro.



6) Derivate

$$f'(x) = D\left(\frac{\sqrt{1+2x}}{1-3x^2}\right)$$

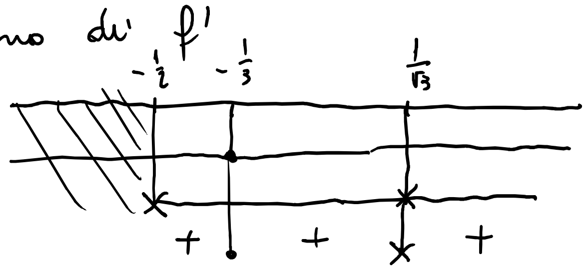
$$= \frac{\left(\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{1+2x}} \cdot \cancel{2}\right)(1-3x^2) - \sqrt{1+2x}\,(-6x)}{(1-3x^2)^2}$$

$$= \frac{\frac{1-3x^2}{\sqrt{1+2x}} + 6x\sqrt{1+2x}}{(1-3x^2)^2}$$

$$= \frac{1-3x^2 + 6x(1+2x)}{\sqrt{1+2x}\,(1-3x^2)^2}$$

$$= \frac{9x^2 + 6x + 1}{\sqrt{1+2x}\,(1-3x^2)^2} = \frac{(3x+1)^2}{\sqrt{1+2x}\,(1-3x^2)^2}$$

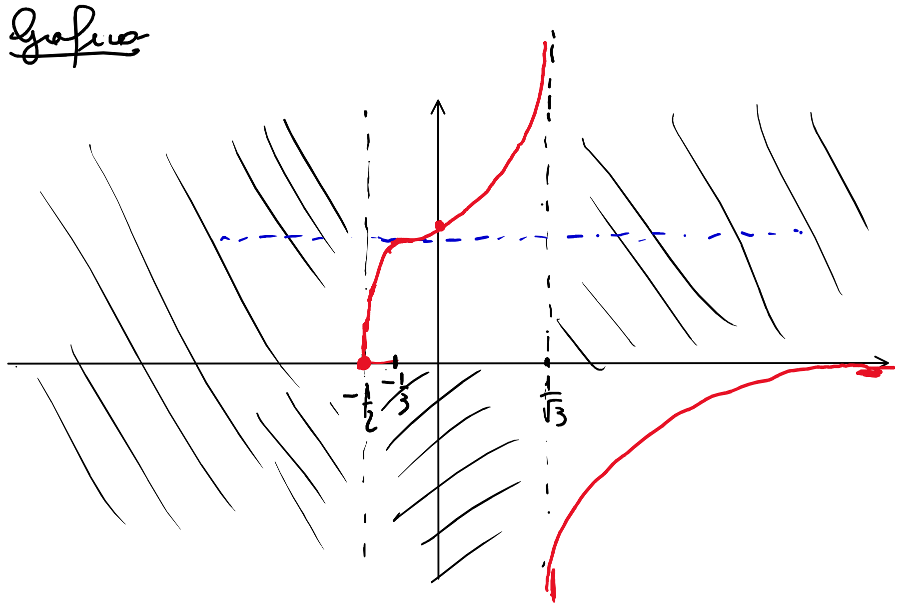
Segno di f'



$x = -\frac{1}{3}$ è un punto di flesso a tangente orizzontale.

$$f\left(-\tfrac{1}{3}\right) = \frac{\sqrt{\frac{1}{3}}}{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Grafico



$$\lim_{x \to -\frac{1}{2}} f'(x) = +\infty$$

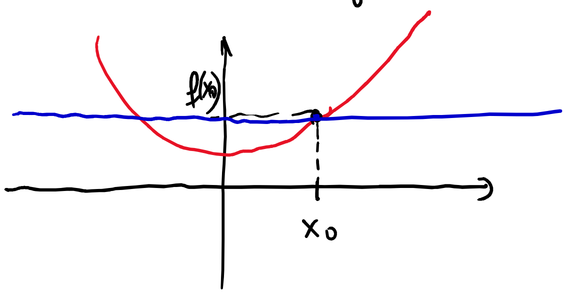
In $x = -\frac{1}{2}$ c'è un punto a tangente verticale

Polinomi di Taylor

Idea, data $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in I$, vogliamo trovare il polinomo di grado al più n che approssima meglio il grafico di f vicino al punto x_0.

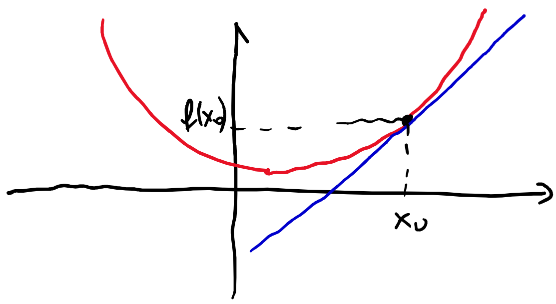
- $n = 0$

  Polinomi di grado $0 \longrightarrow$ costanti



$$P_0(x) = f(x_0)$$

- $n = 1$, $P_1(x) = ax + b$



$$P_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$P_1(x_0) = f(x_0)$$

$$P_1'(x_0) = f'(x_0)$$

- $n = 2$. $P_2(x) = a(x - x_0)^2 + b(x - x_0) + c$

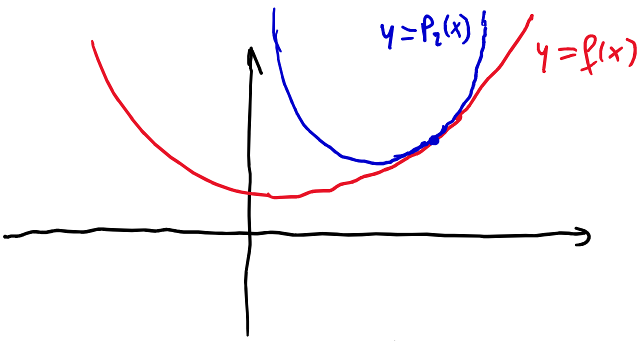
Il polinomio che approssima meglio f sarà quello per cui

$$P_2(x_0) = f(x_0)$$
$$P_2'(x_0) = f'(x_0)$$
$$P_2''(x_0) = f''(x_0)$$

$$P_2(x) = a(x-x_0)^2 + b(x-x_0) + c \Rightarrow P_2(x_0) = c = f(x_0)$$
$$P_2'(x) = 2a(x-x_0) + b \Rightarrow P_2'(x_0) = b = f'(x_0).$$
$$P_2''(x) = 2a \Rightarrow P_2''(x_0) = 2a = f''(x_0) \text{ cioè } a = \tfrac{1}{2} f''(x_0)$$

Quindi

$$P_2(x) = \frac{1}{2} f''(x_0)(x-x_0)^2 + f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$$
$$= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x-x_0)^2$$



Idea: si dimostra che il polinomio di grado $\le n$ che approssima meglio il grafico di f è:

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x-x_0)^2 + \frac{1}{6} f'''(x_0)(x-x_0)^3$$
$$+ \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} f''''(x_0)(x-x_0)^4 + \dots\dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n$$

dove $n! = 1\cdot 2\cdot 3 \cdot \dots \cdot n$.