Esercitazione sul calcolo delle derivate e applicazioni

Elenco delle derivate delle funzioni elementari

1) $Dx^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ $\rightsquigarrow$ casi particolari $\begin{cases} Dc = 0 \\ Dx = 1 \\ Dx^2 = 2x \\ Dx^n = nx^{n-1} \end{cases}$

2) $De^x = e^x$, $Da^x = a^x \cdot \ln a$

3) $D\ln x = \frac{1}{x}$, $D\log_a x = \frac{1}{x \cdot \ln a}$

4) $D\sin x = \cos x$

5) $D\cos x = -\sin x$

6) $D\tg x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tg^2 x$ $\left(D\cotg x = -\frac{1}{\sin^2 x} \right)$

7) $D\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

8) $D\arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

9) $D\arctg x = \frac{1}{1+x^2}$

__Oss.__ Ricordiamo che le funzioni elementari sono derivabili in ogni punto del loro dominio, ad eccezione della funzione $y = x^\alpha$, $0 < \alpha < 1$, che non è derivabile per $x = 0$, e delle funzioni $y = \arcsin x$ e $y = \arccos x$ che non sono derivabili per $x = -1$ e $x = 1$.

Inoltre, la funzione $y = |x|$ è derivabile in

Inoltre, la funzione $y = |x|$ è derivabile in tutti i punti tranne $x = 0$.

Ricordiamo le regole di derivazione della somma, prodotto e quoziente:

1) $D(f+g)(x) = Df(x) + Dg(x)$

2) $D(f \cdot g)(x) = Df(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot Df(x)$

3) $D\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{Df(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot Dg(x)}{[g(x)]^2}$

Derivata della funzione composta e inversa

4) $D(f \circ g)(x) = Df(g(x)) \cdot Dg(x)$

5) $D f^{-1}(x) = \dfrac{1}{Df(f^{-1}(x))}$

<u>Oss.</u> $D(c \cdot f(x)) = c \cdot Df(x) \quad \forall c \in \mathbb{R}$

(dalla 2) $D(c \cdot f(x)) = \cancel{\underbrace{Dc}_{0} \cdot f(x)} + c \cdot Df(x)$)

oppure direttam. con la def.

Esercizi sul calcolo delle derivate

1) $D\left(\frac{1}{x}\right) = D(x^{-1}) = -1 \cdot x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

2) $D(\sqrt{x}) = D\left(x^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$

$= \frac{1}{2\sqrt{x}}$

3) $D\left(\sqrt[5]{x^3}\right) = D\left(x^{\frac{3}{5}}\right) = \frac{3}{5} x^{\frac{3}{5}-1} = \frac{3}{5} x^{-\frac{2}{5}}$

$= \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{x^{\frac{2}{5}}} = \frac{3}{5 \cdot \sqrt[5]{x^2}}$.

4) $D(3^x) = 3^x \cdot \ln 3$.

5) $D(\sin x \cdot e^x) = \cos x \cdot e^x + \sin x \cdot e^x$

$= e^x(\cos x + \sin x)$

6) $D(x^3 - 2x + \cos x) = 3x^2 - 2 - \sin x$

7) $D\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right) = \frac{2x(x^2+1) - (x^2-1) \cdot 2x}{(x^2+1)^2}$

$= \frac{2x(\cancel{x^2}+1-\cancel{x^2}+1)}{(x^2+1)^2} = \frac{4x}{(x^2+1)^2}$.

8) $D(x^2 \cdot 2^x) = 2x \cdot 2^x + x^2 \cdot 2^x \cdot \ln 2$

$= x 2^x (2 + x \ln 2)$

9) $D(2^x \log_2 x) = 2^x \ln 2 \cdot \log_2 x + 2^x \cdot \frac{1}{x \ln 2}$

$= 2^x\left(\cancel{\ln 2} \cdot \frac{\ln x}{\cancel{\ln 2}} + \frac{1}{x \ln 2}\right)$

$\left(\qquad \cancel{\ln 2} \qquad x \ln 2 \right)$

$\left(\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}\right) \qquad = 2^x\left(\ln x + \dfrac{1}{x\ln 2}\right).$

10) $D \log x^3 = \dfrac{1}{x^3}\cdot 3x^2 \qquad \left(D \log x = \dfrac{1}{x}\right)$

$= \dfrac{3}{x}.$

11) $D e^{x^5} = e^{x^5}\cdot 5x^4 \qquad \left(D e^x = e^x\right)$

12) $D \sin 5x = (\cos 5x)\cdot 5 = 5\cos 5x.$

13) $D \arctg e^x = \dfrac{1}{1+(e^x)^2}\cdot e^x \qquad \left(D \arctg x = \dfrac{1}{1+x^2}\right)$

$= \dfrac{e^x}{1+e^{2x}}$

14) $D e^{\sqrt{x}} = e^{\sqrt{x}}\cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}}. \qquad \left(D\sqrt{x} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)$

15) $D\left(\log_2 x\right)^3 = 3\left(\log_2 x\right)^2\cdot \dfrac{1}{x\ln 2}.$

16) $D\, 5^{x^3+x+1} = 5^{x^3+x+1}\cdot(3x^2+1)\cdot \ln 5.$

17) $D\sqrt{x^2+x+1} = \dfrac{1}{2\sqrt{x^2+x+1}}\cdot(2x+1).$

18) $D\left(\dfrac{x}{\log x}\right) = \dfrac{1\cdot \log x - \cancel{x}\cdot \frac{1}{\cancel{x}}}{(\log x)^2} =$

18) $D\left(\frac{x}{\log x}\right) = \frac{\log x - \cancel{x}\cdot\frac{1}{\cancel{x}}}{(\log x)^2} =$

$$= \frac{\log x - 1}{\log^2 x}.$$

19) $D\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) =$

$$= \frac{1}{\frac{x^2+1}{x^2}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) =$$

$$= \frac{\cancel{x^2}}{x^2+1}\cdot\left(-\frac{1}{\cancel{x^2}}\right) = -\frac{1}{x^2+1}.$$

Osservazioni sulle derivata del valore assoluto e conseguenze.

Es. Verificare che $D|x| = \frac{x}{|x|}$ per $x \neq 0$.

(Ricorda: $|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$)

Basta osservare che

se $x > 0$ $D|x| = Dx = 1$

e se $x < 0$ $D|x| = D(-x) = -1$.

Es. Verificare che $D\log|x| = \frac{1}{x}$ per $x \neq 0$.

Calcol.: $D\log|x| = \frac{1}{|x|}\cdot\frac{x}{|x|} = \frac{\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}} = \frac{1}{x}$ per $x \neq 0$.

Es. Verificare che, se $f(x)$ è una funzione derivabile in un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$, allora $\forall x \in I$ tale che $f(x) \neq 0$:

$$D \log|f(x)| = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

$$D \log|f(x)| = \frac{1}{|f(x)|} \cdot \frac{f(x)}{|f(x)|} \cdot f'(x)$$

$f(x) \neq 0$

derivata funz. composta

$$= \frac{\cancel{f(x)}}{f(x)^{\cancel{2}}} \cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Es. Calcolare la derivata di funzioni della forma:

$$f(x)^{g(x)}.$$

$$\left(\text{Def.} \quad f(x)^{g(x)} := e^{g(x) \log f(x)} \right)$$

Calcol. $D f(x)^{g(x)} = D\, e^{g(x)\log f(x)}$

$$= e^{g(x)\log f(x)} \cdot \left[g'(x) \cdot \log f(x) + g(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)} \right]$$

$$= f(x)^{g(x)} \left[\qquad '' \qquad \right]$$

Es. $D x^{\frac{1}{x}} = D e^{\frac{1}{x}\log x}$

$$= e^{\frac{1}{x}\log x} \cdot \left[-\frac{1}{x^2} \cdot \log x + \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} \right]$$

$$= x^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2} \left[1 - \log x \right]$$

$$= x^{\frac{1}{x}-2} \left[1 - \log x \right].$$

Es. Si calcoli la derivata delle seguenti funzioni e si determini la retta tangente al grafico nel punto indicato:

1) $f(x) = \ln(1+3x^2)$ (nel p.to di ascissa $x=1$)

2) $f(x) = x^2 e^{-x^2}$ (nel p.to di ascissa $x=2$)

3) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$ (nel p.to di ascissa $x=0$)

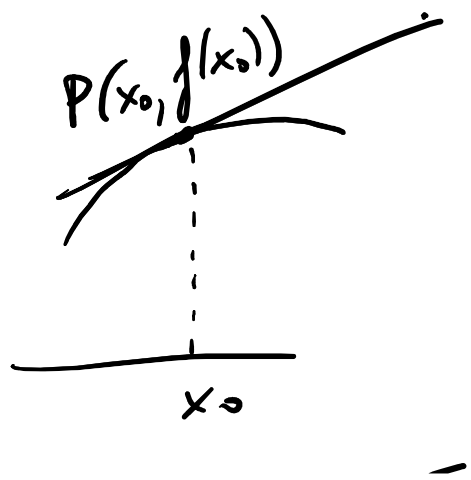
Es. 1) $f(x) = \ln(1+3x^2)$ D: $1+3x^2 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$D = \mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{6x}{1+3x^2}$$

equaz
retta tg nel punto $P(x_0, f(x_0))$

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$



x_0

Ricorda:

$$\boxed{y - \underbrace{y_0}_{f(x_0)} = \underbrace{m}_{f'(x_0)}(x - x_0)}$$

$P(x_0, f(x_0))$

$m = f'(x_0)$

$f'(x_0)$ rappresenta il coeff. angolare della retta tg al grafico nel p.to $P(x_0, f(x_0))$

$$\boxed{y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)}$$

$x_0 = 1$

$f(x) = \ln(1 + 3x^2)$

$f(1) = \ln 4$

$f'(x) = \frac{6x}{1+3x^2}$

$f'(1) = \frac{\cancel{6}^{3}}{\cancel{4}_{2}} = \frac{3}{2}$

$\Rightarrow \quad y - \ln 4 = \frac{3}{2}(x - 1)$

$y = \frac{3}{2}x - \frac{3}{2} + \ln 4 \,. \quad \square$

Es. Determinare gli intervalli di monotonia delle seguenti funzioni e gli eventuali p.ti di max e min relativi:

1) $f(x) = x \log x$

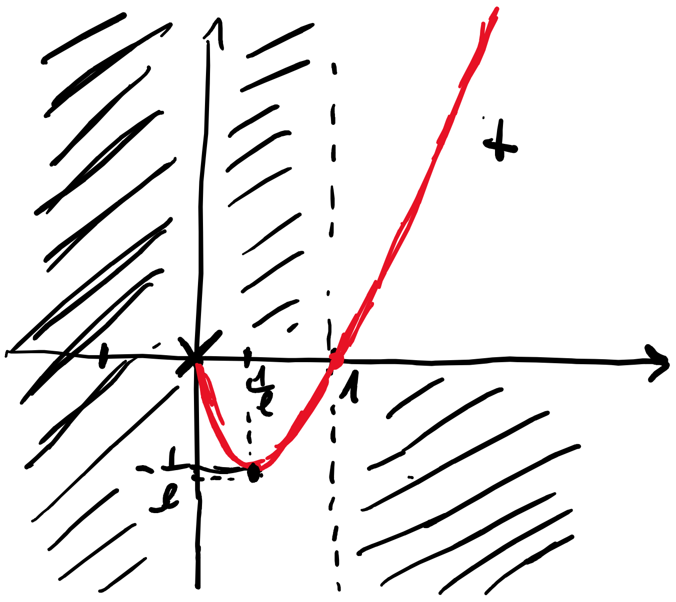
2) $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 2}$

3) $f(x) = (x^2 - 8) \cdot e^x$

Facciamo lo studio completo della 1).

Es 1) $f(x) = x \log x$

$D: x > 0$

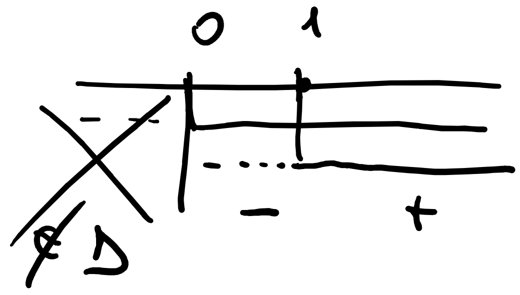


Segno: $f(x) > 0$

$\overset{I}{x}\ \overset{II}{\log x} > 0$

I: $x > 0$ per $x > 0$

II: $\log x > 0$ per $x > 1$



$f(x) > 0$ per $x > 1$

$f(x) < 0$ per $0 < x < 1$

$f(x) = 0 \quad x \log x = 0$ — $\cancel{x = 0}$ $\notin D$

$\log x = 0$

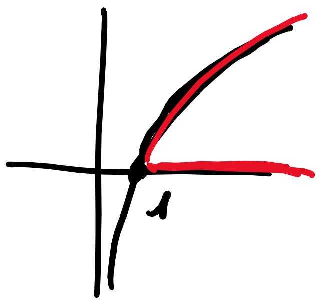
$x = 1$

$$\left(\begin{array}{l} \log x > 5 \\ e^{\log x} > e^5 \\ \quad \parallel \\ x > e^5 \end{array} \right)$$

$\log x > 0$

$e^{\log x} > e^0$

$x > 1$



Limiti:

$$\lim_{x \to +\infty} \overbrace{x \log x}^{(+\infty)(+\infty)} = +\infty$$ (non c'è asint. orizz. dx)

$$\lim_{x \to 0^+} \underbrace{x}_{0}\ \underbrace{\log x}_{-\infty} = 0$$ (dalla Teoria)

Asint. obliquo?

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x} \log x}{\cancel{x}} = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x} \log x}{\cancel{x}} = +\infty$$

(non c'è asint. obliquo)

Monotonia

$$f'(x) = 1 \cdot \log x + \cancel{x} \cdot \frac{1}{\cancel{x}}$$

$$= \log x + 1$$

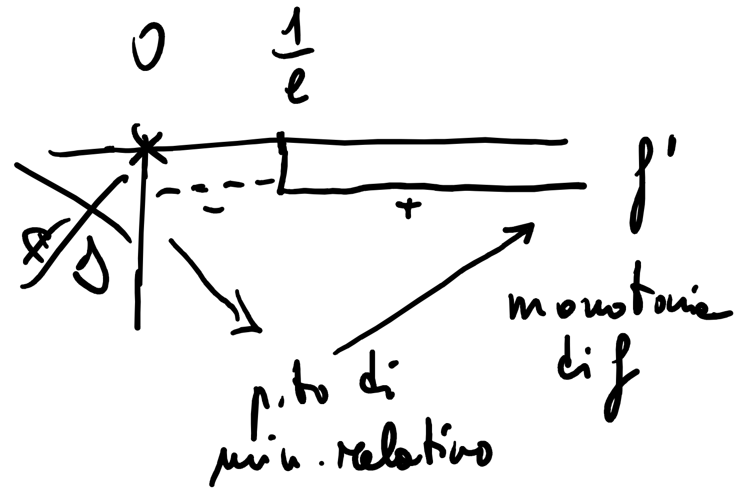
$f'(x) > 0 \qquad \log x + 1 > 0$

$$\log x > -1$$

$$e^{\log x} > e^{-1}$$

$$x > \frac{1}{e}.$$

$f'(x) < 0 \quad$ per $\quad 0 < x < \frac{1}{e}$



$x = \frac{1}{e}$ p.to di min rel.

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} \log \frac{1}{e} = \frac{1}{e} \cdot (-1) = -\frac{1}{e}$$

Monot.: f è decrescente in $]0, \frac{1}{e}]$
f è crescente in $[\frac{1}{e}, +\infty[$.

$m\left(\frac{1}{e}, -\frac{1}{e}\right)$ è p.to di minimo relativo, (anche assoluto) per f.