MATEMATICA - LEZIONE 26

mercoledì 12 novembre 2025 09:02

Def: Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e siano $f: I \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in I$. Si dice che la funzione f è DERIVABILE IN x_0 se

$$\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R}$$

(il limite esiste ed è finito)

In tal caso tale limite si dice DERIVATA di f in x_0 e si indica con

$$f'(x_0), \quad Df(x_0), \quad \frac{df}{dx}(x_0), \quad f^{(1)}(x_0)$$

Derivate elementari

$$D\,c = 0$$

$$D\,x = 1$$

$$D(ax+b) = a$$

$$D\,x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}$$

$$D\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$D\,e^x = e^x$$

$$D\,a^x = a^x \ln a$$

$$D \sin x = \cos x$$

$$D \cos x = -\sin x$$

$$D|x| = \frac{|x|}{x} \quad \text{se } x \neq 0.$$

Regole per derivate e operazioni

- $D(f \pm g) = Df \pm Dg$
- $D(cf) = c\,Df \qquad c \in \mathbb{R}.$
- $D(fg) = Df \cdot g + f\,Dg$
- $D\left(\frac{1}{g}\right) = \frac{-Dg}{g^2}$
- $D\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{Df\,g - f\,Dg}{g^2}$
- $D(g \circ f) = Dg \circ f \cdot Df$

  cioè $Dg(f(x)) = Dg(f(x)) \cdot Df(x)$

TEOREMA (DERIVATA DELLA FUNZIONE INVERSA)

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ e sia $f: I \longrightarrow f(I)$ invertibile con inversa $f^{-1}: f(I) \longrightarrow I$. Se f è derivabile in x e $Df(x) \neq 0$ allora f^{-1} è derivabile in $f(x)$ e

$$Df^{-1}(f(x)) = \frac{1}{Df(x)}$$

Equivalentemente:

$$Df(x) = \frac{1}{Df^{-1}(f(x))}$$

se $Df^{-1}(f(x)) \neq 0$

ESEMPI

1) $f(x) = \ln x \qquad f:]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}.$

$f^{-1}(x) = e^x \qquad f^{-1}: \mathbb{R} \longrightarrow]0, +\infty[$

$Df^{-1}(x) = D e^x = e^x.$

$$Df(x) = \frac{1}{Df^{-1}(f(x))} = \frac{1}{e^{f(x)}} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}$$

$\boxed{\text{Ricordare: } \quad D \ln x = \frac{1}{x}}$

oss

$$D \ln|x| = \frac{1}{|x|} D|x| = \frac{1}{|x|} \cdot \frac{|x|}{x} = \frac{1}{x}.$$

2) $f(x) = \arctan x$

$f: \mathbb{R} \longrightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

$f^{-1}(x) = \tan x$

$$D \tan x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

$$D \arctan x = \frac{1}{Df^{-1}(f(x))} = \frac{1}{1+\tan^2 f(x)}$$

$$= \frac{1}{1+\tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\boxed{D \arctan x = \frac{1}{1+x^2}}$$

3) $f(x) = \arcsin x$

$f: [-1, 1] \longrightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$f^{-1}(x) = \sin x \qquad , \quad f^{-1}: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow [-1, 1].$

$Df^{-1}(x) = \cos x$

$$Df(x) = \frac{1}{\cos(f(x))} \qquad \text{se } \cos(f(x)) \neq 0$$

$$= \frac{1}{\cos(\underbrace{\arcsin(x)}_{\alpha})}$$

$\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad \cos\alpha \geq 0$

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$$

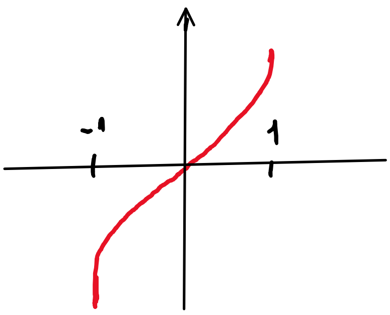
$$|\cos\alpha| = \sqrt{1-\sin^2\alpha}$$

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha}$$

$$\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)} = \sqrt{1-x^2}$$

$$D\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \text{se } x \in \,]-1, 1[$$

Vedremo che $\arcsin x$ non è derivabile in $x = 1$ e in $x = -1$.



$$\boxed{D\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

In modo simile: $\boxed{D\arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$

Nota Dalla regola della catena segue che:

$$D\ln f(x) = \frac{1}{f(x)} \cdot Df(x)$$

$$D \arctan f(x) = \frac{1}{1+f(x)^2} Df(x)$$

$$D \arcsin(f(x)) = \frac{1}{\sqrt{1-f(x)^2}} \cdot Df(x).$$

OSS

$$D \log_a x = D \frac{\ln x}{\ln a} = \frac{1}{\ln a} \cdot D \ln x = \frac{1}{x \ln a}.$$

ESEMPI DI RIEPILOGO

1) $D \ln(x^2 + e^{2x})$

$$= \frac{1}{x^2+e^{2x}} \cdot D(x^2+e^{2x})$$

$$= \frac{1}{x^2+e^{2x}} \cdot (2x + e^{2x} D(2x))$$

$$= \frac{1}{x^2+e^{2x}} \cdot (2x + 2e^{2x})$$

$$= \frac{2(x+e^{2x})}{x^2+e^{2x}}$$

$$\left[D e^{ax+b} = e^{ax+b} D(ax+b) = a e^{ax+b} \right]$$

2) $D\sqrt{\arctan x} = \frac{1}{2\sqrt{\arctan x}} \cdot D \arctan x$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\arctan x}} \cdot \frac{1}{1+x^2}.$$

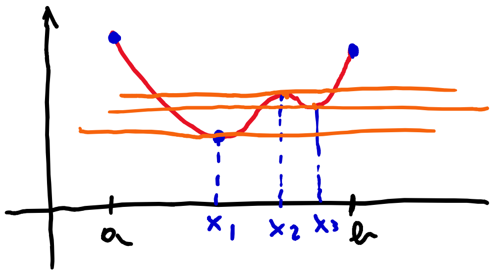
3) $D\dfrac{e^{-2x}}{x^2-3x} = \dfrac{D(e^{-2x})\cdot(x^2-3x) - e^{-2x}D(x^2-3x)}{(x^2-3x)^2}$

$= \dfrac{-2e^{-2x}\cdot(x^2-3x) - e^{-2x}(2x-3)}{(x^2-3x)^2}$

$= \dfrac{-e^{-2x}(2(x^2-3x)+2x-3)}{(x^2-3x)^2}$

$= -\dfrac{e^{-2x}(2x^2-4x-3)}{(x^2-3x)^2}$

Teoremi sulle derivate



TEOREMA DI FERMAT

Siano $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a<b$ e sia $f:]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$. Sia $x_0 \in]a,b[$ un punto di max o di min locale per f in $]a,b[$. Se f è derivabile in x_0, allora $f'(x_0)=0$.

DIM

Supponiamo x_0 sia un punto di min. locale per f. Allora $\exists\, r>0$ tale che $]x_0-r, x_0+r[\subseteq]a,b[$ e $\forall\, x \in]x_0-r, x_0+r[:\ f(x) \geq f(x_0)$.
(cioè $f(x)-f(x_0) \geq 0$).

Se $x \in]x_0, x_0 + r[$: $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$.

Quindi: $\lim_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$. $(f'_+(x_0) \geq 0)$.

(il limite esiste perché f è derivabile).

Se $x \in]x_0 - r, x_0[$: $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{\underbrace{x - x_0}_{<0}} \leq 0$.

$\lim_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$.

Ma f è derivabile in x_0.

$$\exists \underbrace{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{= f'(x_0)} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$f'(x_0) \geq 0 \ \wedge \ f'(x_0) \leq 0 \quad \Rightarrow \quad f'(x_0) = 0$.

ESEMPIO:

$$f :]-1, 1[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow x^4 - x$$

$f'(x) = 4x^3 - 1$

$f'(x) = 0 \iff 4x^3 - 1 = 0$

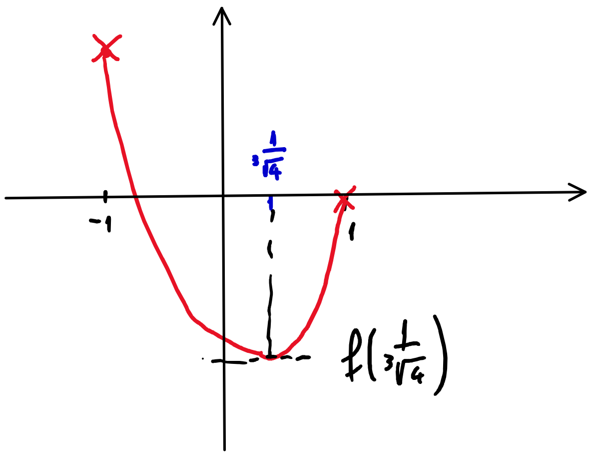
$\iff x = \dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}$

Si noti anche che $f'(x) > 0$ se $x > \dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}$

e $f'(x) < 0$ se $x < \dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}$

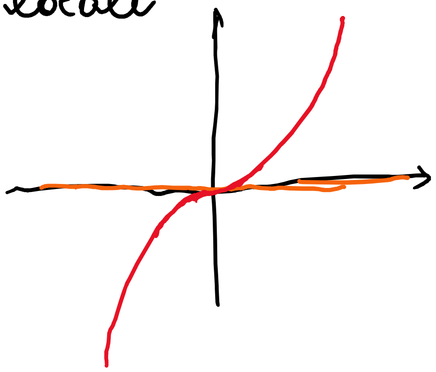
$f(-1) = 1 + 1 = 2$

$f(1) = 1 - 1 = 0$



Attenzione:

1) Non tutti i punti in cui $f' = 0$ sono di max o di min locale



$f(x) = x^3$

$f'(x) = 3x^2$

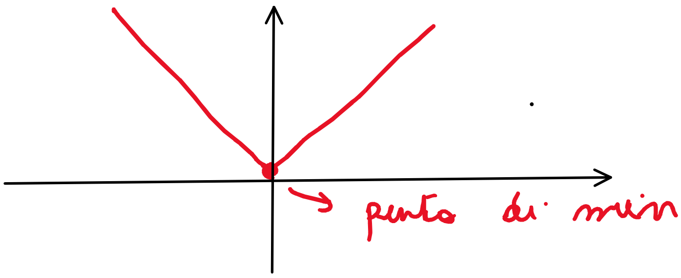
$f'(0) = 0$.

però 0 non è punto di max né di min.

2) Il teorema non vale negli intervalli chiusi se x_0 si trova negli estremi dell'intervallo

3) Una funzione può avere punti di min/max locale in punti in cui non è derivabile

$f(x) = |x|$



Riassumendo Data $f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ i punti di max / min locale per f possono essere:

1) punti interni all'intervallo in cui f è derivabile e $f' = 0$.
2) gli estremi dell'intervallo
3) punti in cui f non è derivabile.

Def: $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ si dice che f è derivabile in I se derivabile in tutti i punti di I.

Teorema di Rolle.

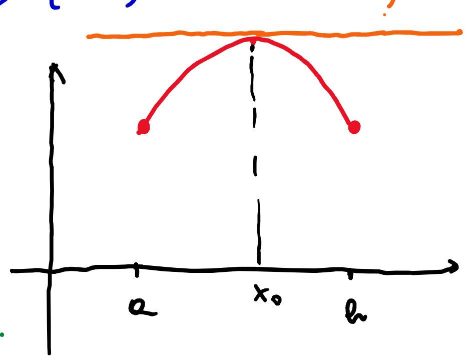
Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ e sia $f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$.

Supponiamo che:

1) f sia continua in $[a, b]$.
2) f sia derivabile in $]a, b[$.
3) $f(a) = f(b)$

Allora $\exists\, x_0 \in]a, b[$ tale che $f'(x_0) = 0$.

retta tangente orizzontale



DIM

f è continua in $[a, b]$.

Per Weierstrass $\exists\, x_1, x_2 \in [a, b]$ t.c. $f(x_1) = \min\limits_{[a,b]} f$ e $f(x_2) = \max\limits_{[a,b]} f$.

Ci sono due casi

1) $x_1, x_2 \in \{a, b\}$.

Siccome $f(a) = f(b) \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$

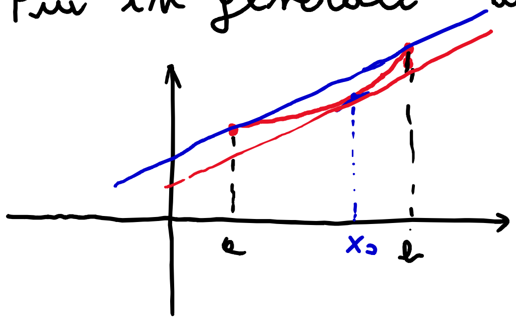
$\max_{[a,b]} f = \min_{[a,b]} f \Rightarrow f$ è costante.

Ma allora $f'(x) = 0$ in tutti i punti di $]a, b[$.

Si può scegliere x_0 come un qualsiasi punto di $]a, b[$.

2) Almeno uno tra x_1 e x_2 appartiene ad $]a, b[$.

In tale punto f' è nulla per il Teorema di Fermat.



Più in generale dato $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a, b]$ e derivabile in $]a, b[$ si può trovare un punto in cui la retta tangente è parallela alla retta che passa per $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$

TEOREMA DI LAGRANGE

Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ e $f: [a, b] \to \mathbb{R}$.

Supponiamo che f sia continua in $[a, b]$ e derivabile in $]a, b[$. Allora $\exists\, x_0 \in]a, b[$ t.c. $f'(x_0) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

DIM

Sia $h(x) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$

Per definizione $h(a) = f(a)$

$$h(b) = \frac{f(b)-f(a)}{\cancel{b-a}} \cdot \cancel{(b-a)} + f(a)$$

$$= f(b) - \cancel{f(a)} + \cancel{f(a)} = f(b).$$

Sia $g(x) = f(x) - h(x)$.

g è continua in $[a,b]$ e derivabile in $]a,b[$.

inoltre $g(a) = f(a) - h(a) = 0$

$g(b) = f(b) - h(b) = 0$

Per il teorema di Rolle applicato a g.

$\exists\, x_0 \in]a,b[$ t.c. $g'(x_0) = 0$.

Ma

$$g'(x) = f'(x) - h'(x) =$$

$$= f'(x) - D\left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)\right)$$

$$= f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$0 = g'(x_0) \Rightarrow f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

TEOREMA DI CAUCHY

Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Siano $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$.

continue in $[a,b]$ e derivabili in $]a,b[$.

Se $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in]a,b[$, allora $\exists\, x_0 \in]a,b[$

t.c. $\dfrac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

CRITERIO DI MONOTONIA

Sia I un intervallo e sia $f: I \to \mathbb{R}$ derivabile in I. Allora:

1) f è monotona crescente in $I \iff f'(x) \geq 0$ $\forall x \in I$.

2) f è monotona decrescente in $I \iff f'(x) \leq 0$ $\forall x \in I$.

3) Se $f'(x) > 0$ $\forall x \in I$, allora f è strettamente monotona crescente

4) Se $f'(x) < 0$ $\forall x \in I$, allora f è strettamente monotona decrescente.

DIM

Dimostriamo solo 1).

$\Rightarrow$ Supponiamo f monotona crescente in I.

$$f'(x) = \lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = \lim_{y \to x^+} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

Se $y > x$ allora $f(y) \geq f(x)$ quindi

$$\frac{\overbrace{f(y) - f(x)}^{\geq 0}}{\underbrace{y - x}_{> 0}} \geq 0.$$

$$f'(x) = \lim_{y \to x^+} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq 0.$$

$\Leftarrow$ Supponiamo che $f'(x) \geq 0$ $\forall x \in I$.

Dobbiamo dimostrare che f è crescente cioè:

$\forall a, b \in I$ con $a < b$ $f(a) \leq f(b)$.

Applichiamo il Teorema di Lagrange a f in $[a,b]$.
f è derivabile in I quindi anche continua in I. Per Lagrange $\exists\, x_0 \in]a,b[\subseteq I$ t.c.

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(x_0)$$

$$f(b)-f(a) = \underbrace{f'(x_0)}_{\geq 0}\,\underbrace{(b-a)}_{>0} \geq 0.$$

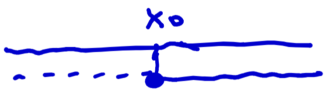
$$\Rightarrow f(b)-f(a) \geq 0 \Rightarrow f(b) \geq f(a).$$

OSS

Sia x_0 un punto in cui $f'(x_0)=0$. Se conosciamo il segno di f' in un intorno del punto x_0, possiamo determinare se x_0 è un punto di max/min.

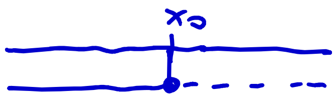
Sia $x_0 \in I$, $f'(x_0)=0$.

1) Segno di f': $-,+$



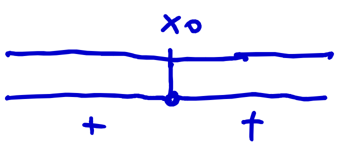
$\Rightarrow x_0$ è punto di min locale per f.

2) Segno di f': $+,-$

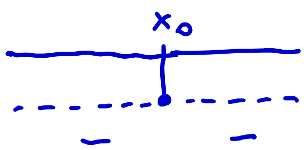


$\Rightarrow x_0$ è punto di max locale

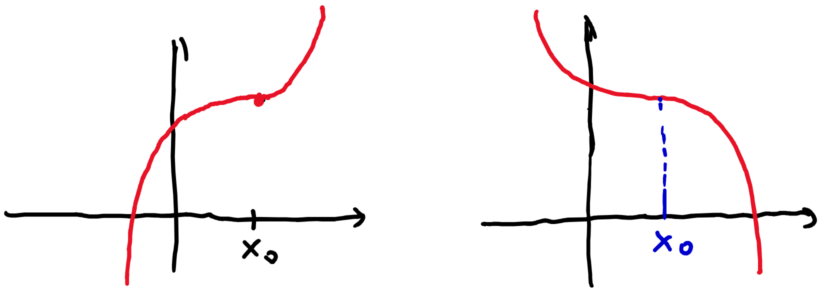
3) Segno di f': $+,+$ o $-,-$.



o



si dice che x_0 è un PUNTO DI FLESSO A TANGENTE ORIZZONTALE



$$f(x) = \frac{x}{1+x^2}$$

1) Dominio : $Dom(f) = \mathbb{R}$ $\quad (x^2+1 \neq 0 \ \forall x \in \mathbb{R})$.

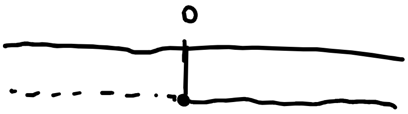
2) $f(-x) = \dfrac{-x}{1+(-x)^2} = \dfrac{-x}{1+x^2} = -f(x)$

f è dispari.

3) Segno e zeri di f:

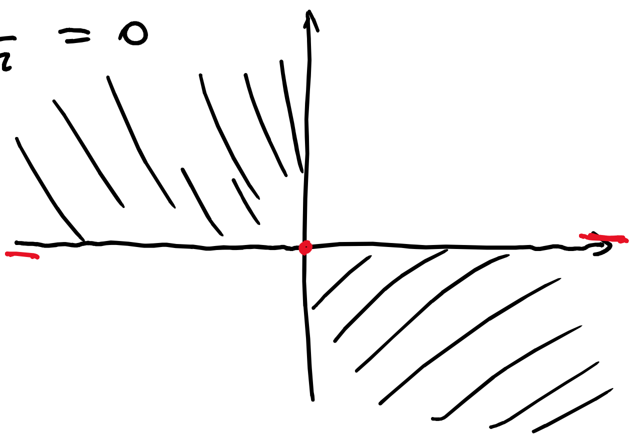
$f(x) = 0 \iff x = 0$

$f(x) > 0 \iff \dfrac{x}{\underbrace{1+x^2}_{>0}} > 0 \iff x > 0$.



4) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{1+x^2} = 0$

$\displaystyle\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$.



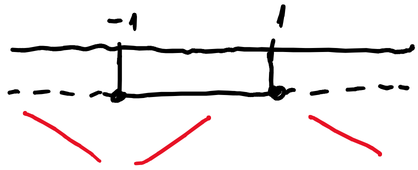
5) $f'(x) = D\left(\dfrac{x}{1+x^2}\right)$

$$= \frac{1 \cdot (1+x^2) - 2x \cdot x}{(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{1 - x^2}{(1+x^2)^2}$$

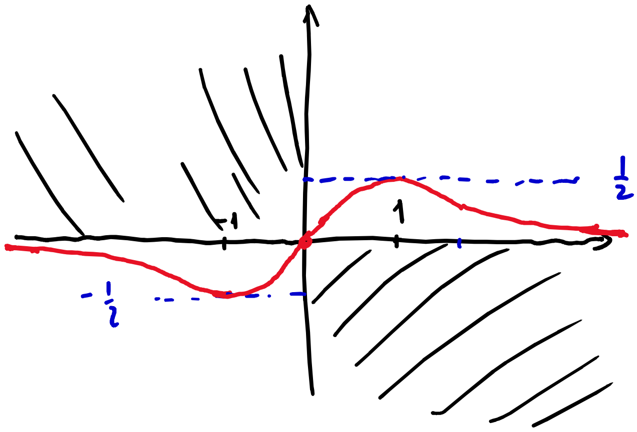
$f'(x) = 0 \iff x = \pm 1$

Segno di f' coincide con il segno di $1 - x^2$



$x = -1$ è punto di min locale

$x = 1$ è punto di max locale



$f(-1) = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$

$f(1) = \frac{1}{2}$