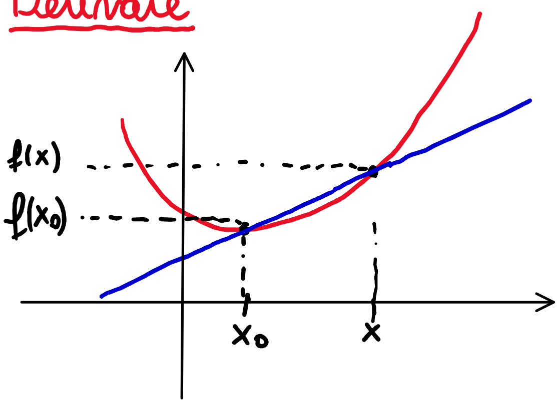
MATEMATICA - LEZIONE 25

lunedì 10 novembre 2025 09:03

Derivate



la quantità

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$ si dice

RAPPORTO INCREMENTALE DI f nell'intervallo di estremi x_0 ed x.

Rappresenta il coefficiente angolare della retta passante per $(x_0, f(x_0))$ e $(x, f(x))$

Def: Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e siano $f: I \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in I$. Si dice che la funzione f è DERIVABILE IN x_0 se

$$\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \in \mathbb{R}$$ (il limite esiste ed è finito)

In tal caso tal limite si dice DERIVATA di f in x_0 e si indica con

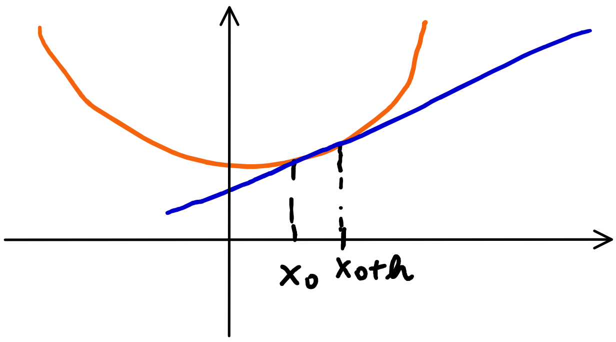
$$f'(x_0), \quad Df(x_0), \quad \frac{df}{dx}(x_0), \quad f^{(1)}(x_0)$$

Quindi

$$\boxed{f'(x_0) = Df(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}$$

OSS

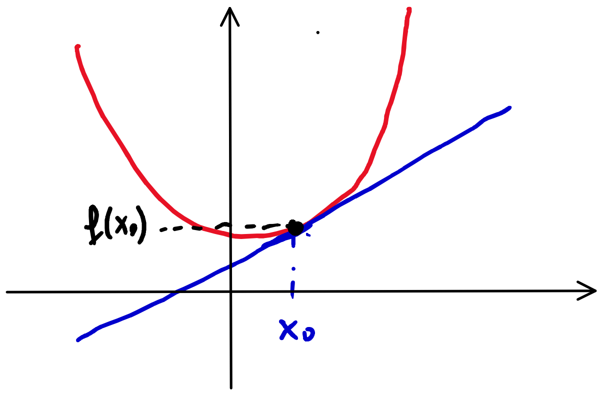
$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \overset{h = x - x_0}{=} \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$



Def: Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo e siano $f: I \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in I$. La retta di equazione

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

è detta RETTA TANGENTE AL GRAFICO DI f in $(x_0, f(x_0))$ (o in x_0).



la retta tangente è la retta che approssima meglio il grafico di f vicino al punto $(x_0, f(x_0))$

TEOREMA (CONTINUITÀ DELLE FUNZIONI DERIVABILI)

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e siano $f: I \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in I$. Se f è derivabile in x_0 allora f è continua in x_0.

DIM

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) + f(x_0)$$

$$= \lim_{x \to x_0} \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\to f'(x_0) \in \mathbb{R}} \cdot \underbrace{(x - x_0)}_{\to 0} + f(x_0)$$

$$= f'(x_0) \cdot 0 + f(x_0) = f(x_0)$$

Cioè f è continua in x_0.

oss f' si può vedere come una funzione.

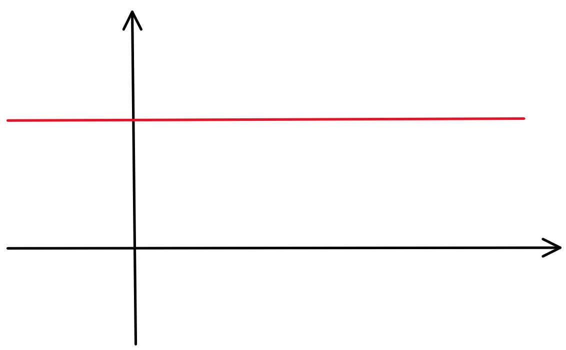
Se $f : I \to \mathbb{R}$ e sia $J = \{x \in I \mid f \text{ è derivabile in } x\}$

allora $f' : J \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

è una funzione definita su J.

Derivate delle funzioni elementari



1) Funzioni costanti

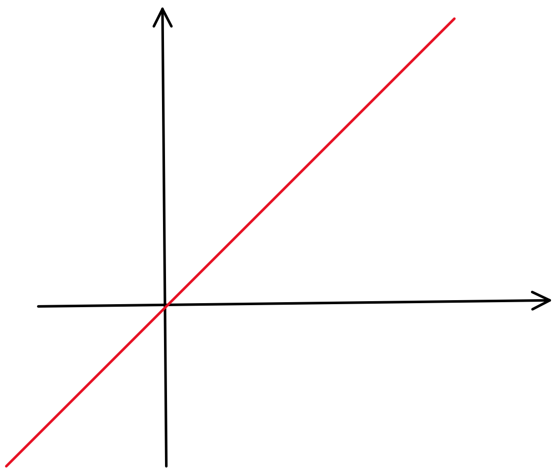
$f(x) = c$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0$$

$$\boxed{Dc = 0}$$

2) $f(x) = x$



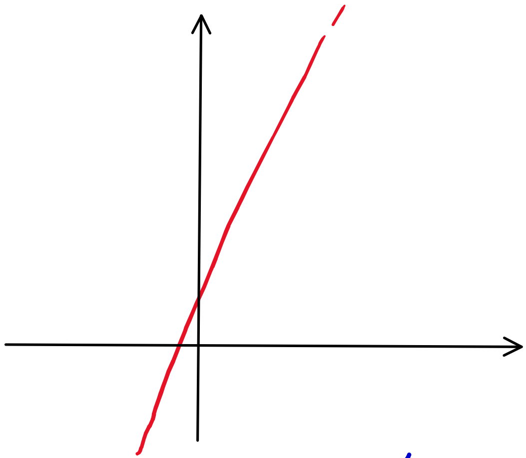
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x} + h \quad - \cancel{x}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} 1 = 1$$

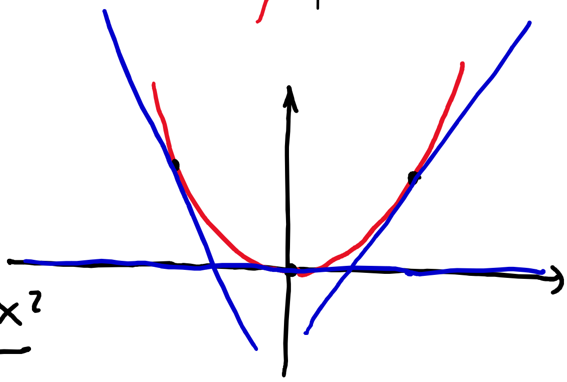
$$\boxed{Dx = 1}$$

3) $f(x) = ax + b$



$$\boxed{D(ax+b) = a}$$

4) $f(x) = x^2$



$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x^2} + 2xh + h^2 \quad - \cancel{x^2}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2xh}{h} + \frac{h^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} 2x + h = 2x$$

$$\boxed{Dx^2 = 2x}$$

4) $f(x) = x^\alpha$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^\alpha - x^\alpha}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^\alpha \left(1+\frac{h}{x}\right)^\alpha - x^\alpha}{h}$$

Limite notevole

$$\boxed{\lim_{y \to 0} \frac{(1+y)^\alpha - 1}{y} = \alpha}$$

$$(\text{se } x>0) = x^\alpha \lim_{h \to 0} \frac{\left(1+\frac{h}{x}\right)^\alpha - 1}{\frac{h}{x} \cdot x}$$

$$= x^\alpha \lim_{h \to 0} \underbrace{\frac{\left(1+\frac{h}{x}\right)^\alpha - 1}{\frac{h}{x}}}_{\to \alpha} \cdot \frac{1}{x}$$

$$= x^\alpha \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x}$$

$$= \alpha x^{\alpha-1}$$

$$\boxed{D x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}}$$

Attenzione: Questo conto funziona sempre se $x>0$.

Se $\alpha > 0$, allora $f(x) = x^\alpha$ è definita anche in 0 e

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^\alpha}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} h^{\alpha-1} = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha > 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha < 1 \\ 1 & \text{se } \alpha = 1 \end{cases}$$

$f(x) = x^\alpha$ è derivabile in 0 solo se $\alpha \geq 1$.

ESEMPI

$$D x^3 = 3x^2$$

$$D x^{10} = 10 x^9$$

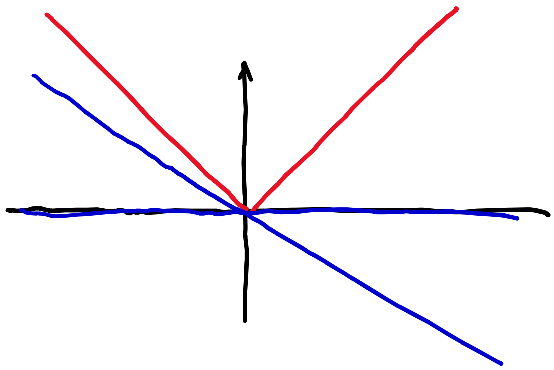
$$D \sqrt{x} = D x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$D \frac{1}{x^8} = D x^{-8} = -8 x^{-9} = -\frac{1}{x^9}$$

$$D \frac{1}{x} = D x^{-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

5) $f(x) = |x|$



Fissiamo $x \in \mathbb{R}$.

. Se $x > 0$:

$$\lim_{h \to 0} \frac{|x+h| - |x|}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x} + h \cancel{- x}}{h} = 1$$

. Se $x < 0$

$$\lim_{h \to 0} \frac{|x+h| - |x|}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{-x} - h \cancel{+ x}}{h} = -1$$

. Se $x = 0$

$$\lim_{h \to 0} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{|h|}{h} \nexists$$

Infatti:

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = 1$$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = -1$$

f non è derivabile in 0.

$$\boxed{D|x| = \begin{cases} 1 & \text{se } x>0 \\ -1 & \text{se } x<0 \end{cases} = \frac{|x|}{x} = \frac{x}{|x|}}$$

$|x|$ non è derivabile in 0.

Def Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, siano $f: I \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in I$.

- Se x_0 non è l'estremo destro di I, definiamo

$$f'_+(x_0) = \lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

(DERIVATA DESTRA DI f IN x_0)

- Se x_0 non è l'estremo sinistro di I, definiamo

$$f'_-(x_0) := \lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Se $f(x) = |x|$.

$f'_+(0) = 1$ e $f'_-(0) = -1$.

6) $f(x) = e^x$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{e^x e^h - e^x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} e^x \left(\frac{e^h - 1}{h}\right) = e^x \cdot 1 = e^x$$

$\xrightarrow[h \to 0]{} 1$ limite notevole

$$\boxed{D e^x = e^x}$$

Più in generale $\boxed{D a^x = a^x \cdot \ln a}$

7) $f(x) = \sin x$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sin x (\cos h - 1)}{h} + \frac{\cos x \sin h}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \sin x \cdot \underbrace{\frac{\cos h - 1}{h}}_{\to 0} + \cos x \cdot \frac{\sin h}{h}$$

$\frac{\sin h}{h} \to 1$ per il limite notevole

$$= \sin x \cdot 0 + \cos x \cdot 1$$

$$= \cos x .$$

Nota :

[Abbiamo usato che

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = -\lim_{h\to 0} \frac{1-\cos h}{h^2} \cdot h = -\frac{1}{2}\cdot 0 = 0$$]

Conclusione : $\boxed{D \sin x = \cos x}$

8) $f(x) = \cos x$

In modo simile a quanto fatto per il seno:

$f'(x) = -\sin x$ cioè $\boxed{D \cos x = -\sin x.}$

Ricapitolando

$D\, c = 0$

$D\, x = 1$

$D(ax+b) = a$

$D\, x^{\alpha} = \alpha\, x^{\alpha - 1}$

$D \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$D\, e^x = e^x$

$D\, a^x = a^x \ln a$

$D \sin x = \cos x$

$D \cos x = -\sin x$

$D|x| = \frac{|x|}{x}$ se $x \neq 0$.

TEOREMA (OPERAZIONI TRA DERIVATE)

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, $f, g: I \longrightarrow \mathbb{R}$ e $x \in I$. Se f e g sono derivabili in x allora:

1) $f \pm g$ è derivabile in x e
$$D(f \pm g) = f' \pm g' = Df \pm Dg$$

2) $\forall c \in \mathbb{R}$: cf è derivabile in x e
$$D(cf) = c\, Df$$

3) $f \cdot g$ è derivabile in x
$$D(f \cdot g) = Df \cdot g + f \cdot Dg$$

4) Se $g(x) \neq 0$ allora $\frac{f}{g}$ è derivabile in x e:
$$D\frac{f}{g} = \frac{Df \cdot g - f\, Dg}{g^2}$$

5) Se $g(x) \neq 0$, allora $\frac{1}{g}$ è derivabile in x e $D\frac{1}{g} = \frac{-Dg}{g^2}$

ESEMPI

- $D(x^3 - x^7 + 2) = Dx^3 - Dx^7 + D2$

$$= 3x^2 - 7x^6 + 0$$
$$= 3x^2 - 7x^6$$

- $D(\sqrt{x} + e^x) = D\sqrt{x} + De^x$
$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} + e^x$$

- $D(x \sin x) = (Dx) \cdot \sin x + x \, D \sin x$
$$= 1 \cdot \sin x + x \cos x$$
$$= \sin x + x \cos x$$

- $D\left(\frac{3x^2 - 1}{4x^5 + 1}\right) = \frac{D(3x^2-1) \cdot (4x^5+1) - (3x^2-1)\, D(4x^5+1)}{(4x^5+1)^2}$
$$= \frac{6x \cdot (4x^5+1) - (3x^2-1)(4 \cdot 5x^4 + 0)}{(4x^5+1)^2}$$
$$= \frac{24x^6 + 6x - ((3x^2-1) \cdot 20x^4)}{(4x^5+1)^2}$$
$$= \frac{24x^6 + 6x - 60x^6 + 20x^4}{(4x^5+1)^2}$$
$$= \frac{-36x^6 + 20x^4 + 6x}{(4x^5+1)^2}$$

- $D \tan x = D \frac{\sin x}{\cos x}$
$$= \frac{(D \sin x) \cdot \cos x - \sin x \cdot D(\cos x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos x \cdot \cos x - \operatorname{sen} x \cdot (-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

(oppure $\frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$)

Ricordare $\boxed{D \tan x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x}$

Derivata di una composizione di funzioni.

TEOREMA (REGOLA DELLA CATENA)

Siano I, J due intervalli e siano $f : I \to \mathbb{R}$, $g : J \to \mathbb{R}$ tali che $f(I) \subseteq J$. Siano $x \in I$ e $y = f(x)$. Se f è derivabile in x e g è derivabile in y, allora $g \circ f$ è derivabile in x e

$$D(g \circ f)(x) = Dg(f(x)) \cdot Df(x)$$

$$(g \circ f)'(x) = \underline{g'(f(x))} \cdot f'(x).$$

ESEMPI

1) $h(x) = e^{3x^2}$

$f(x) = 3x^2$, $g(x) = e^x$

$h(x) = g(f(x)) = e^{3x^2}$

$g(x) = e^x$, $Dg(x) = e^x$, $Dg(f(x)) = e^{f(x)} = e^{3x^2}$

$Df(x) = 3 \cdot 2x = 6x$

Per la regola della catena si ha che:

$Dh(x) = e^{3x^2} \cdot 6x$

2) $D\, e^{\cos x}$

$f(x) = \cos x$, $g(x) = e^x$

$Df(x) = -\sin x$ $Dg(x) = e^x$

$$D\, e^{\cos x} = Dg(f(x)) \cdot Df(x)$$

$$= e^{\cos x} \cdot (-\sin x)$$

$$= -e^{\cos x} \cdot \sin x .$$

Nota: In generale $\boxed{D\, e^{f(x)} = e^{f(x)}\, Df(x)}$

- $D\, e^{\sqrt{x}} = e^{\sqrt{x}}\, D\sqrt{x} = e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$
- $D\, e^{2x} = e^{2x} \cdot D(2x) = e^{2x} \cdot 2 = 2e^{2x}$
- $D\, e^{-x} = e^{-x}\, D(-x) = e^{-x} \cdot (-1) = -e^{-x}$

$$\cdot\ D\left(e^{x^4-x^3}\right) = e^{x^4-x^3}\, D\left(x^4-x^3\right)$$
$$= e^{x^4-x^3}\left(4x^3-3x^2\right)$$

$$\cdot\ D \sin\left(\sqrt{x}\right)$$

$$f(x) = \sqrt{x} \quad , \quad g(x) = \sin x$$

$$Df(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad Dg(x) = \cos x$$

$$Dg(f(x)) = \cos\sqrt{x}$$

$$D \sin\sqrt{x} = \cos\sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Nota

$$\boxed{\begin{aligned} D \sin f(x) &= \cos f(x) \cdot Df(x) \\ D \cos f(x) &= -\sin f(x) \cdot Df(x) \end{aligned}}$$

$$D \cos\left(e^x - \frac{1}{x^2}\right)$$
$$= -\sin\left(e^x - \frac{1}{x^2}\right) D\left(e^x - \frac{1}{x^2}\right)$$
$$= -\sin\left(e^x - \frac{1}{x^2}\right) \cdot \left(e^x - D x^{-2}\right)$$
$$= -\sin\left(e^x - \frac{1}{x^2}\right) \cdot \left(e^x + 2\frac{1}{x^3}\right)$$

$$D\sqrt{4x+1}$$

$$f(x) = 4x+1 \quad , \quad g(x) = \sqrt{x}$$

$$D f = 4 \qquad D g = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$D\sqrt{4x+1} = \frac{1}{2\sqrt{4x+1}} \cdot 4 = \frac{2}{\sqrt{4x+1}}$$

Nota

$$\boxed{\begin{array}{l} D\sqrt{f(x)} = \dfrac{1}{2\sqrt{f(x)}} \cdot Df(x). \\ D\left(f(x)\right)^{\alpha} = \alpha\, f(x)^{\alpha-1}\, Df(x). \end{array}}$$

e

- $D \sin^{10} x = 10 \sin^{9} x \quad D \sin x$

$= 10 \sin^{9} x \cdot \cos x.$