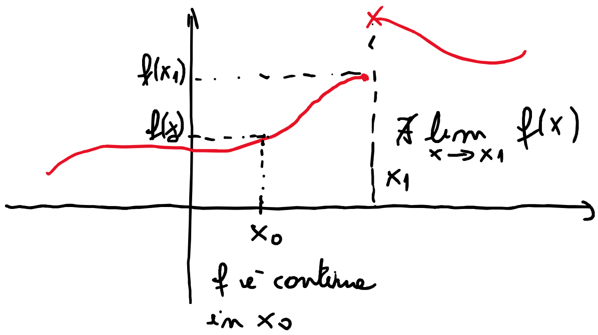
Funzioni continue

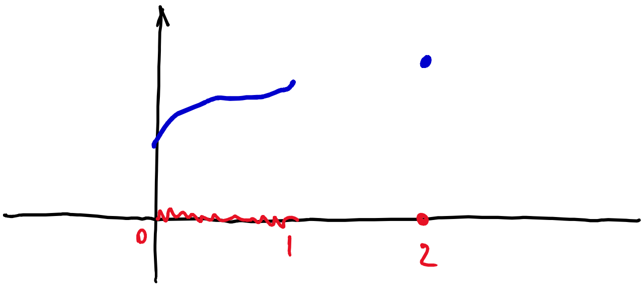
Def: Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e sia $f: I \to \mathbb{R}$. Sia $x_0 \in I$. Si dice che f è CONTINUA NEL PUNTO x_0 se $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.



quindi f non è continua in x_1.

Def Più in generale se $A \subseteq \mathbb{R}$, $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in A$. Si dice che f è continua in x_0 se vale una delle seguenti proprietà:

1) $x_0 \in A \cap D(A)$ e $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
2) $x_0 \in A \setminus D(A)$.



$A = [0,1] \cup \{2\}$

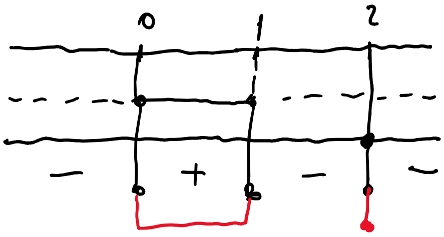
$D(A) = [0,1]$

$f(x) = \sqrt{(x - x^2)(x-2)^2}$

$$(x - x^2)(x-2)^2 \geq 0$$

$0 \leq x \leq \quad \cup \quad x = 2$

$\mathrm{Dom}(f) = [0,1] \cup \{2\}$.



Def: Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e sia $f: A \to \mathbb{R}$. Si dice che f è continua in A se f è continua in tutti i punti di A.
Se $A \subseteq \mathbb{R}$ non viene specificato esplicitamente si intende che $A = \mathrm{Dom}(f)$ (dominio naturale).

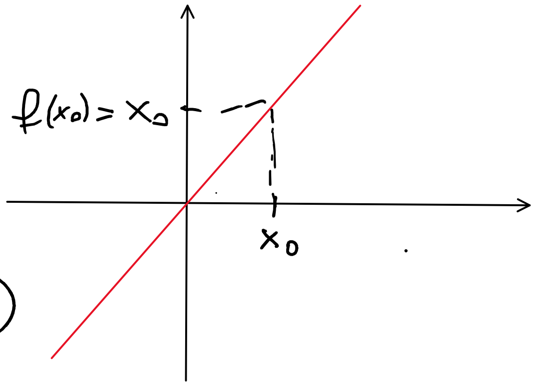
ESEMPI

1) $f(x) = x$

$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$ e

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} x = x_0 = f(x_0)$$

$\forall x_0 \in \mathbb{R}$, f è continua in x_0



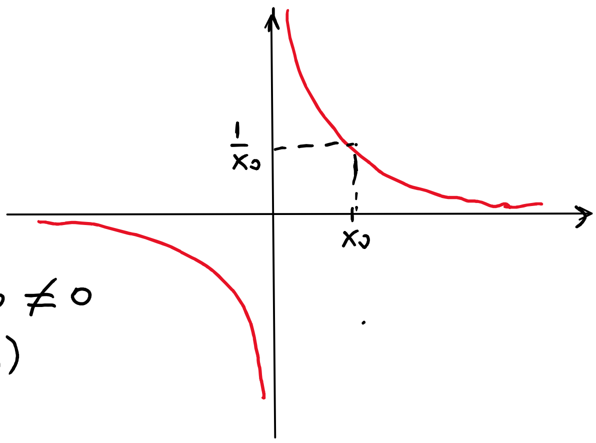
2) $f(x) = \frac{1}{x}$

$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\forall x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $x_0 \neq 0$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{x} = \frac{1}{x_0} = f(x_0)$$

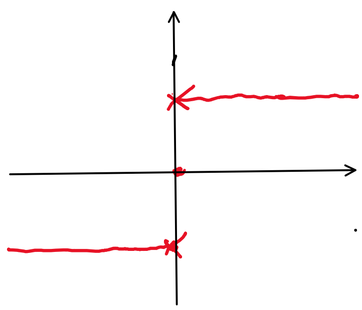
f è continua in x_0



Quindi f è una funzione continua (nel suo dominio).

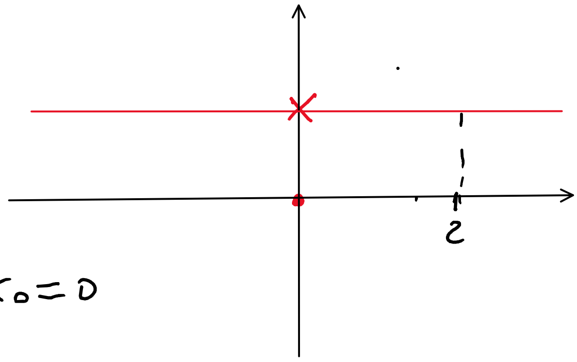
3) $f(x) = \mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$

f non è continua in $x_0 = 0$.



Infatti $\nexists \lim_{x \to 0} f(x)$ $\left(\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1 \quad \lim_{x \to 0^+} f(x) = 1 \right)$

4) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$



- f non è continua nel punto $x_0 = 0$
  perché $\lim_{x \to 0} f(x) = 1 \neq f(0) = 0$
- f è continua in $x_0 = 2$
  $\lim_{x \to x_0} f(x) = 1 = f(2)$

OSS Le funzioni $f(x) = x^\alpha$, $f(x) = a^x$, $f(x) = \log_a x$
$f(x) = \sin x$, $f(x) = \cos x$, $f(x) = \tan x$.
sono funzioni continue (nel loro dominio).

TEOREMA (OPERAZIONI TRA FUNZIONI CONTINUE)

Siano $f, g : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$. Sia $x_0 \in A$ tale che f e g sono continue in x_0.
Allora:

$f \pm g$ è continua in x_0
$f \cdot g$ è continua in x_0
$\frac{f}{g}$ è continua in x_0 se $g(x_0) \neq 0$.

TEOREMA (CONTINUITÀ DELLA COMPOSTA)

Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$, $g : B \to \mathbb{R}$.
Siano $x_0 \in A$, $y_0 \in B$ tali che $f(x_0) = y_0$.

Se f è continua in x_0 e g è continua in y_0, allora $g \circ f$ è continua in x_0

TEOREMA (CONTINUITÀ DELLA FUNZIONE INVERSA SU INTERVALLI)

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e sia $f: I \to f(I)$ una funzione invertibile e continua in I. Allora $f^{-1}: f(I) \to I$ è continua in $f(I)$.
(Se f è continua in x_0, f^{-1} è continua in $f(x_0)$)

Classificazione dei punti di discontinuità

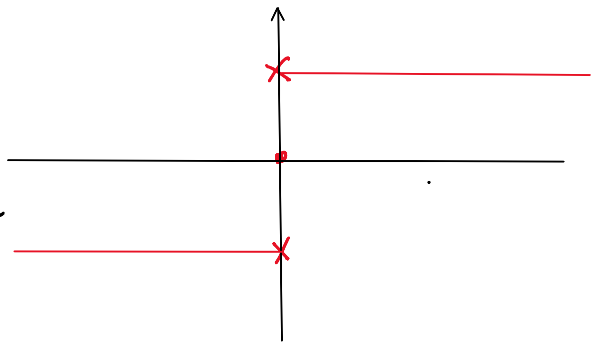
Def: Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$. Sia $x_0 \in A$ si dice che x_0 è un PUNTO DI DISCONTINUITÀ PER f se f non è continua in x_0.

Def Sia $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ con $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Sia $x_0 \in \,]a, b[$, si dice che x_0 è un PUNTO DI DISCONTINUITÀ DI SALTO (O DI I SPECIE) se
$\exists \lim_{x \to x_0^-} f(x) \in \mathbb{R}$ e $\exists \lim_{x \to x_0^+} f(x) \in \mathbb{R}$ ma i due limiti sono diversi.

ESEMPIO

1) $f(x) = \operatorname{sgn} x$

$x = 0$ è un punto di discontinuità di salto



2) $f(x) = \begin{cases} \arctan \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 3 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

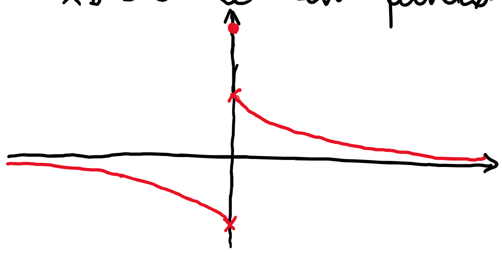
Se $x_0 \neq 0$, f è continua in x_0 perché è composizione di funzioni continue

Se $x_0 = 0$

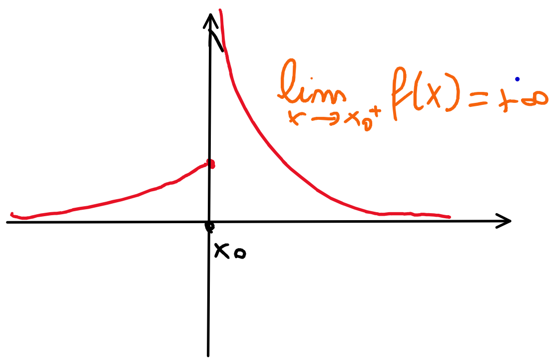
$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \arctan(+\infty) = \frac{\pi}{2}$$

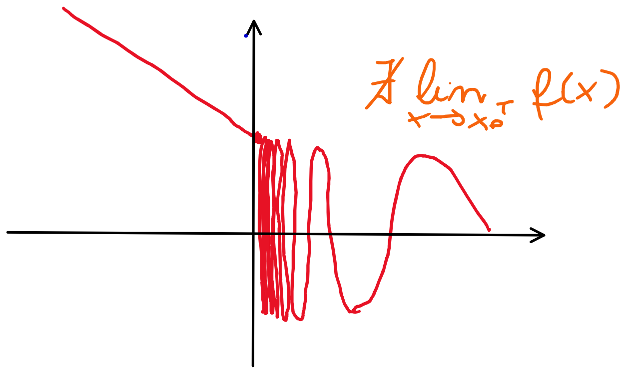
$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \arctan(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$$

$x_0 = 0$ è un punto di discontinuità di salto.



Def: Siano $f: [a, b] \to \mathbb{R}$, $x_0 \in]a, b[$, $a < b$. Si dice che x_0 è un PUNTO DI DISCONTINUITÀ DI SECONDA SPECIE se almeno uno tra $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ e $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ o non esiste o è uguale a $\pm\infty$.

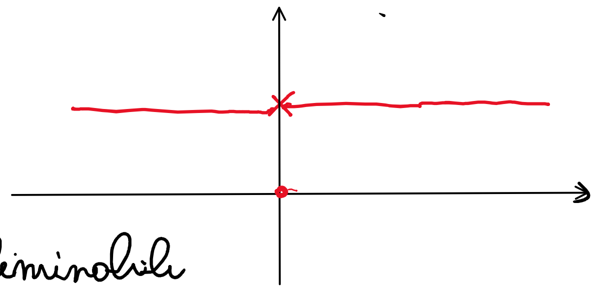




Def: Sia $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in [a, b]$. Si dice che x_0 è un PUNTO DI DISCONTINUITÀ ELIMINABILE (O DI TERZA SPECIE) se $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = L \in \mathbb{R}$ ma $L \neq f(x_0)$.

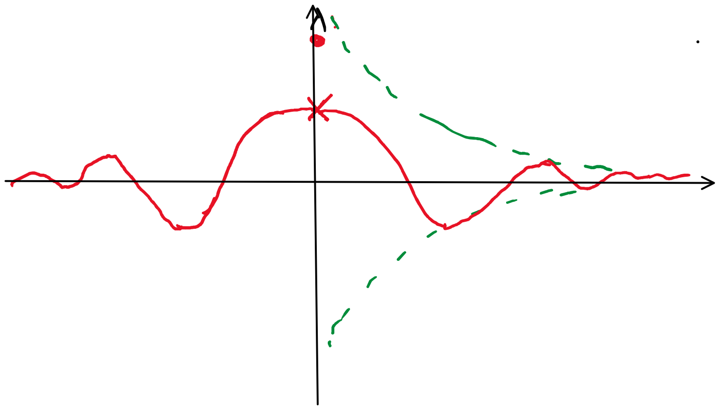
ESEMPI

1) $$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$



$x_0 = 0$ è punto di disc. eliminabile

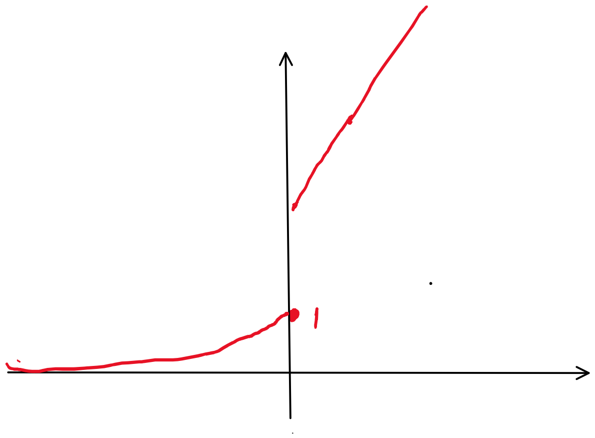
2) $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 2 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$



$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

ma $f(0) = 2$

3) $$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{se } x \leq 0 \\ 2x+3 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$



$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} e^x = 1$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} 2x+3 = 3$$

Teoremi sulle funzioni continue

1) Teorema degli zeri
2) Teorema dei valori intermedi
3) Teorema di Weierstrass

TEOREMA DEGLI ZERI

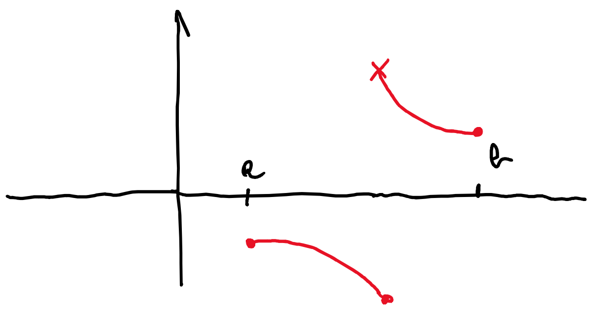
Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$

Sia $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua in $[a, b]$.

Se $f(a) \cdot f(b) < 0$ allora $\exists\, x_0 \in \,]a, b[$ t.c.

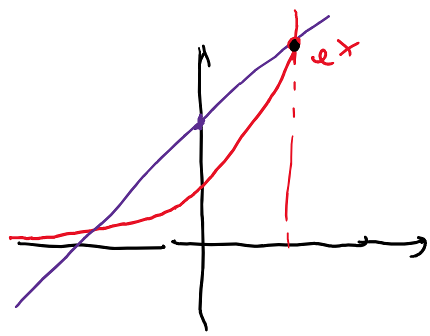
$f(x_0) = 0$

La continuità è necessaria



Il teorema degli zeri è importante perché:

- dice che si possono "trovare" gli zeri di una funzione in modo grafico.



$f(x) = e^x - x - 2$

$e^x - x - 2 = 0$ non si risolve esplicitamente

$f(0) = 1 - 0 - 2 = -1$

$f(2) = e^2 - 4 > 2^2 - 2 = 4 - 2 = 0$

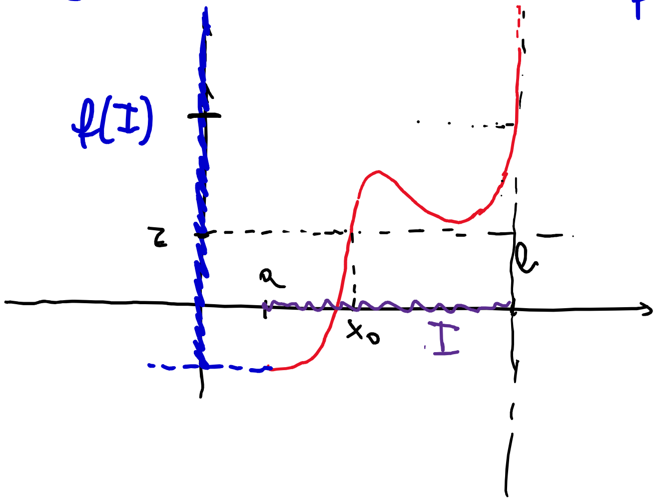
$f(0) \cdot f(2) = (-1) \cdot (e^2 - 4) < 0$

Il teorema degli zeri dice che una soluzione esiste in $]0, 2[$

- Permette di approssimare gli zeri di una funzione.

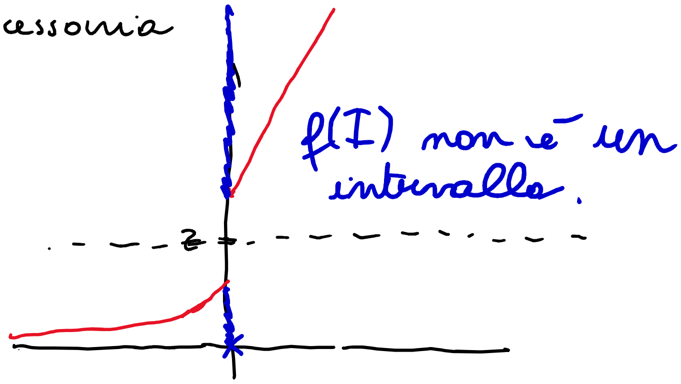
TEOREMA DEI VALORI INTERMEDI

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e sia $f: I \to \mathbb{R}$ continua in I. Allora $f(I)$ è un intervallo. Cioè $\forall z \in]\inf_I f, \sup_I f[$ $\exists x_0 \in I$ tale che $f(x_0) = z$.



La continuità è necessaria

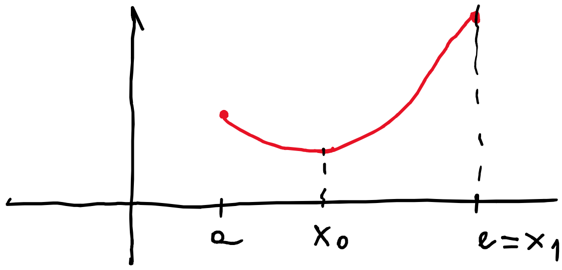
$$f(x) = \begin{cases} e^x & x \leq 0 \\ 2x+3 & x > 0 \end{cases}$$

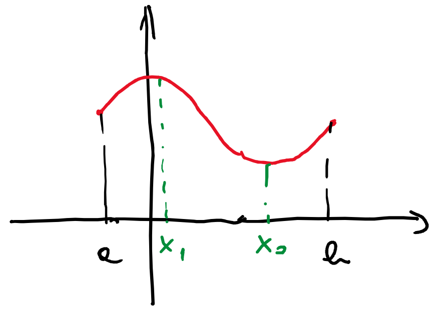


TEOREMA DI WEIERSTRASS

Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a,b]$. Allora $\exists \min_{[a,b]} f$ e $\exists \max_{[a,b]} f$ cioè $\exists x_0, x_1 \in [a,b]$ tali che

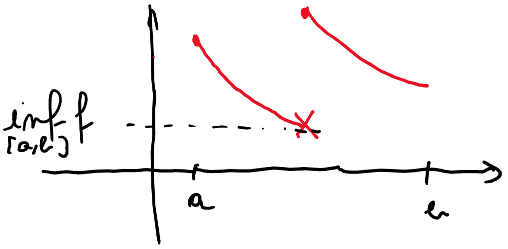
$$f(x_0) = \min_{[a,b]} f \quad e \quad f(x_1) = \max_{[a,b]} f$$





Tutte le ipotesi sono necessarie:

- La continuità è necessaria

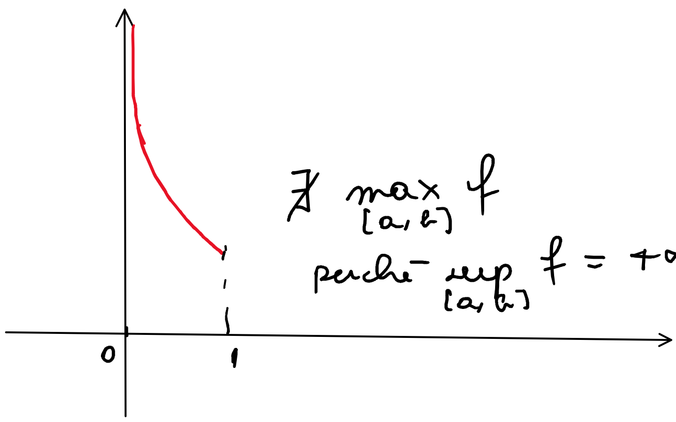


$\nexists\, x_0 \in [a,b]$ t.c. $f(x_0) = \inf_{[a,b]} f$

quindi $\nexists \min_{[a,b]} f$.

- È importante che l'intervallo $[a,b]$ sia chiuso e limitato.

$$f :]0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{1}{x}$$



$\nexists \max_{[a,b]} f$

perché $\sup_{[a,b]} f = +\infty$

Esercizi - Riepilogo

Esercizi di riepilogo

Esercizio 1. Determinare l'insieme delle soluzioni delle seguenti disequazioni:

1. $\dfrac{|3x-2|-1}{2x+1} \geq 0$

2. $\dfrac{|5x-1|-2x}{x^2-9} \leq 0$

3. $\dfrac{|5 \cdot 3^{4x}-1|-2 \cdot 3^{4x}}{3^{8x}-9} \leq 0$

Esercizio 2. Si consideri il numero complesso $z = \dfrac{5+3i}{1+i}$.

1. Determinare la forma algebrica di z.

2. Determinare il modulo e l'argomento di $(z-3)^{13}$

Esercizio 3. Si consideri il numero complesso $z = \dfrac{4i-7}{2i-1}$.

1. Determinare la forma algebrica di z.

2. Scrivere in forma esponenziale le radici cubiche di $w+i$

Esercizio 4. Determinare il dominio, il segno e gli asintoti delle seguenti funzioni:

1. $f(x) = \dfrac{x-3}{x^2-4}$.

2. $f(x) = \dfrac{e^{-2x}}{2x-3}$

3. $f(x) = \sqrt{4x^2-x} + e^{-\frac{1}{x}}$

Risultati degli esercizi

Esercizio 1

1. $\dfrac{|3x-2|-1}{2x+1} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad]-\frac{1}{2},\ \frac{1}{3}]\ \cup\ [1,\ +\infty[.$

2. $\dfrac{|5x-1|-2x}{x^2-9} \leq 0 \quad \Rightarrow \quad]-3,\ \frac{1}{7}]\ \cup\ [\frac{1}{3},\ 3[.$

3. $\dfrac{|5\cdot 3^{4x}-1|-2\cdot 3^{4x}}{3^{8x}-9} \leq 0 \quad \Rightarrow \quad x \leq -\dfrac{1}{4}\log_3 7 \quad \vee \quad [-\frac{1}{4},\ \frac{1}{4}[.$

Esercizio 2

1. $z = \dfrac{5+3i}{1+i} = 4-i.$

2. $(z-3)^{13} = (1-i)^{13}$ ha

$$\big|(z-3)^{13}\big| = 64\sqrt{2}, \qquad \arg\big((z-3)^{13}\big) = \frac{3\pi}{4}.$$

Esercizio 3

1. $z = \dfrac{4i-7}{2i-1} = 3+2i.$

2.
$$z+i = 3+3i = 3\sqrt{2}\, e^{i\pi/4}.$$

   Le radici cubiche sono:

$$(3\sqrt{2})^{1/3}\, e^{i\frac{\pi/4+2k\pi}{3}}, \qquad k=0,1,2.$$

Esercizio 4

1. $f(x) = \dfrac{x-3}{x^2-4}$:

$$\mathrm{Dom} = \mathbb{R}\setminus\{-2,2\}, \qquad \text{asintoti: } x=\pm 2,\ y=0.$$

2. $f(x) = \dfrac{e^{-2x}}{2x-3}$:

   Dom $= \mathbb{R}\setminus\{\frac{3}{2}\}$, asintoto verticale: $x=\frac{3}{2}$, asintoto orizzontale: $y=0$.

3. $f(x) = \sqrt{4x^2-x} + e^{-\frac{1}{x}}$:

$$\mathrm{Dom} =]-\infty,0[\ \cup\ [\tfrac{1}{4},+\infty[.$$

$$\text{Asintoto obliquo per } x\to+\infty: \quad y = 2x+\tfrac{3}{4}.$$

$$\text{Asintoto obliquo per } x\to-\infty: \quad y = -2x+\tfrac{3}{4}.$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty.$$