Funzione esponenziale

Sia $a > 0$, $a \neq 1$ BASE

$$\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto a^x$$

ove a^x è definito nel seguente modo

- Sia $\boxed{x > 0}$, $x = p, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots$

Se $a > 1$

$$a^x = \sup \{ a^{p, \alpha_1, \dots \alpha_n} \mid n \in \mathbb{N}, n \geq 1 \}$$

ove $p, \alpha_1, \dots \alpha_n \in \mathbb{Q}$.

Se $0 < a < 1$

$$a^x = \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^x}$$

$a^x > 0$

$\forall x \in \mathbb{R}$.

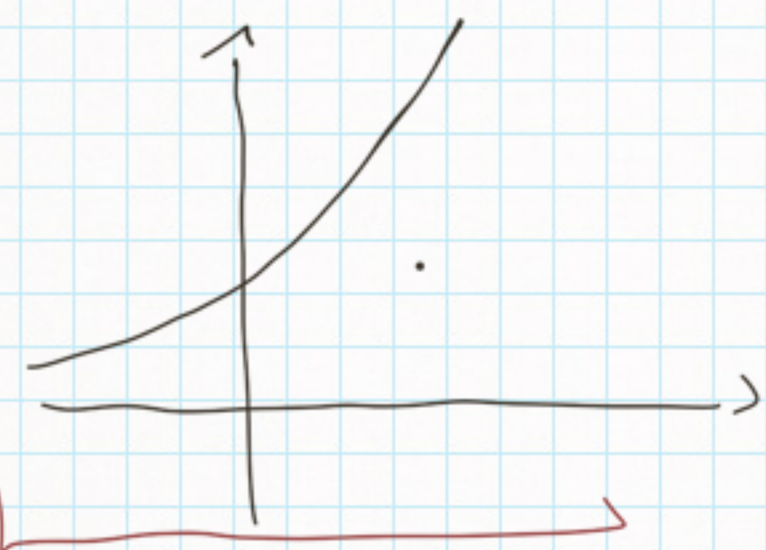
$\boxed{\text{Se } x < 0}$

$$a^x = \frac{1}{a^{-x}}$$

($-x > 0$ e si può usare la definizione precedente)

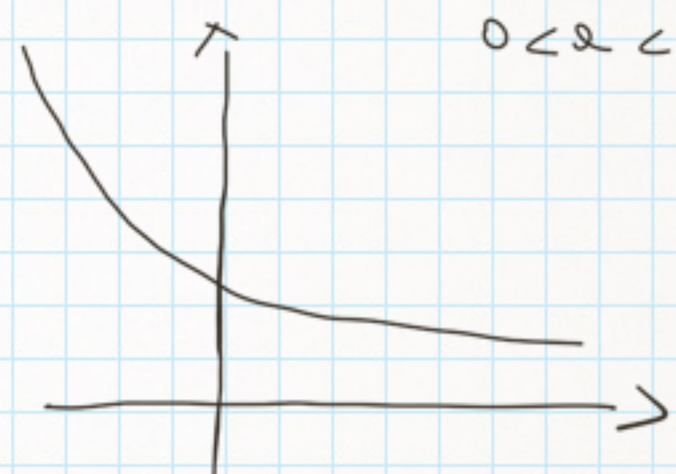
Se $x = 0$ $\quad a^x = 1 \quad \forall a > 0, \ a \neq 1$

Se $a > 1$



STRETT. CRESC.

$0 < a < 1$



STRETT. DECRES.

Proprietà dell'esponenziale

$\forall\, x, y \in \mathbb{R}$

(1) $a^x \cdot a^y = a^{x \cdot y}$

(2) $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$

(3) Se $x < y$, allora $\begin{cases} a^x < a^y & \text{se } a > 1 \\ a^x < a^y & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}$

ESERCIZI

$\boxed{2^3 = 8}$

- $2^3 \cdot 8^{-2} = 2^3 \cdot (2^3)^{-2} = 2^3 \cdot 2^{-6} \underset{(1)}{=} 2^{-3} = \dfrac{1}{8}$

$$\bullet \quad \frac{5^{3} \cdot 5^{-2} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{3}}{5^{4} \cdot 5^{-6}} = \qquad\qquad \frac{1}{5} = 5^{-1}$$

$$= \frac{5^{3} \cdot 5^{-2} \cdot 5^{-3}}{5^{-2}} = \frac{5^{3-2-3}}{5^{-2}} = \frac{5^{-2}}{5^{-2}} = 1$$

Funzioni logaritmo

È la funzione inversa della funzione esponenziale.

Sia $a > 0$, $a \neq 1$

$$\log_a : \,]0,+\infty[\, \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \log_a x$$

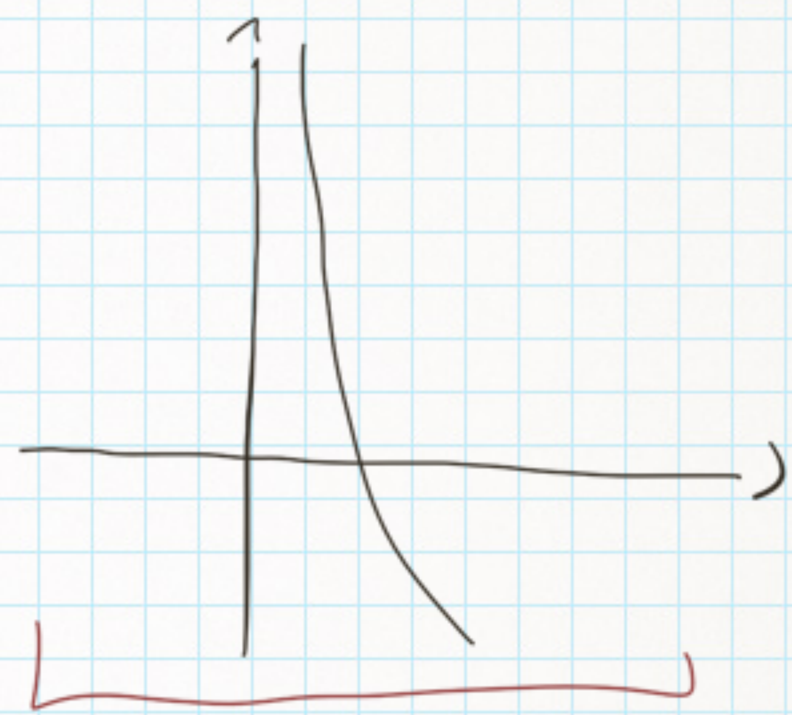
Cos'è $\log_a x$? è l'unico $y \in \mathbb{R}$

t.c. $a^y = x$

$a > 1$

STRETT. CRESCENTE

$0 < a < 1$



STRETT. DECRES

Proprietà:

Siano $a>0$, $a\neq 1$, $x,y>0$. Allora

(1) $\log_a a = 1$ $\qquad \log_a 1 = 0$

(2) $a^{\log_a x} = x$ $\quad$ e $\quad \underbrace{\log_a (a^x) = x}$

(3) $\log_a (x\cdot y) = \log_a x + \log_a y$

(4) $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

(5) $\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x$ $\qquad (\alpha \in \mathbb{R})$

(6) $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$

(7) Se $x<y$, allora $\begin{cases} \log_a x < \log_a y & a>1 \\ \log_a x > \log_a y & 0<a<1 \end{cases}$

ESERCIZI

- $\log_2\left(\frac{1}{4}\right) = \log_2 (2^{-2}) = -2 \log_2 2 = -2$

- $\log_{25} 5 + \log_{25} 125 = \log_{25} (5 \cdot 125)$

$= \log_{25} (625) = \log_{25} (25^2) = 2 \log_{25} 25$

$= 2$

- $\log_2 4 + \log_2 36 - \log_2 16 =$

$$= \log_2\left(\frac{\cancel{4}\cdot \overset{9}{\cancel{36}}}{\cancel{16}}\right) = \log_2 9 = \log_2 3^2 =$$

$$= 2\log_2 3$$

<u>OSS</u>

Abbiamo visto che se $x>0$ e $y>0$, allora

$$\log_a(x\cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

Però cosa succede se sappiamo che $x\cdot y > 0$

$$\log_a(x\cdot y) = \log_a(|x\cdot y|) = \log_a(|x|\cdot|y|) =$$
$$= \log_a(|x|) + \log_a |y|$$

Equazioni e disequazioni esponenziali e logaritmiche

$$2^x = \frac{1}{5}$$

Applichiamo la funzione $\log_2$ a ambo i membri

$$\underbrace{\log_2 2^x} = \log_2 \frac{1}{5}$$

$\log_2\left(\frac{1}{5}\right) < 0$ perché

$0 < \frac{1}{5} < 1$

e quindi

$$x = \log_2\left(\frac{1}{5}\right)$$

$$= -\underbrace{\log_2 5}$$

$$2^x < \frac{1}{5}$$

Applichiamo la funzione $\log_2$ ad entrambi i membri

La base è $a = 2 > 1$ quindi non bisogna cambiare verso alla disuguaglianza

$$\log_2 2^x < \log_2\left(\frac{1}{5}\right)$$

$$x < \log_2\left(\frac{1}{5}\right)$$

• $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 9 = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \Rightarrow x = -2$

oppure

$\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^x = \log_{\frac{1}{3}} 9 = \log_{\frac{1}{3}} 3^2 = 2\log_{\frac{1}{3}} 3 =$

$= 2\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = -2$

l'equazione ha come soluzione

$x = -2$

$0 < a = \frac{1}{3} < 1$

• $\left(\frac{1}{3}\right)^x > 9$

$\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^x < -2 \Rightarrow x < -2$

Determinare le soluzioni della disequazione

$$\left(\frac{1}{4}\right)^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x - 2 > 0 \qquad \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{2x} + \left(\frac{1}{2}\right)^x - 2 > 0$$

Si risolve per sostituzione $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

La disequazione diventa

$$y^2 + y - 2 > 0 \qquad (*)$$

$$y_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \begin{matrix} -2 \\ \\ 1 \end{matrix}$$

$(*)$ è verificata per $y < -2 \lor y > 1$

Ricordiamo che $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

occorre risolvere

$$\underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^x < -2}_{\downarrow} \quad \vee \quad \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^x > 1}_{\downarrow}$$

mai verificata perché $\left(\frac{1}{2}\right)^x > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$

DA RISOLVERE

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x > 1 \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^x < \log_{\frac{1}{2}} 1 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{x < 0}$$

- $4^{x}+\underbrace{4^{-x+1}}-5\leq 0$

Lo scriviamo come

$$4^{x}+4\cdot 4^{-x}-5\leq 0$$

e quindi

$$4^{x}+\frac{4}{4^{x}}-5\leq 0 \quad . \quad \text{Allora}$$

$$\frac{4^{x+x}+4-5\cdot 4^{x}}{4^{x}}\leq 0$$

$$\frac{4^{2x}-5\cdot 4^{x}+4}{\underbrace{4^{x}}_{>0}}\leq 0 \iff 4^{2x}-5\cdot 4^{x}+4\leq 0$$

Risolviamo con la sostituzione $\boxed{4^{x}=y}$

La disequazione diventa

$$y^2 - 5y + 4 \leq 0 \iff 1 \leq y \leq 4$$

$$y_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} \begin{cases} 4 \\ 1 \end{cases}$$

Torniamo alla variabile x

$$1 \leq 4^x \leq 4$$

Applichiamo $\log_4$

e MANTENIAMO

lo stesso verso

$$0 = \log_4 1 \leq x \leq \log_4 4 = 1$$

$$\boxed{0 \leq x \leq 1}$$

- $\log_{\frac{1}{2}} x = 3$

Applichiamo la funzione $\frac{1}{2}^x$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}} x} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$x = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

considerare il dominio della funzione $\log_a$ $(x>0)$

- $\log_{\frac{1}{2}} x > 3$

$$\begin{cases} x>0 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}} x} < \left(\frac{1}{2}\right)^3 \end{cases}$$

$\downarrow$

$0 < \frac{1}{2} < 1$, cambia il verso

$$\begin{cases} x > 0 \\ x < \frac{1}{8} \end{cases}$$

L'insieme delle soluzioni è $\left]0, \frac{1}{8}\right[$

$$\log_3 x \geq 12$$

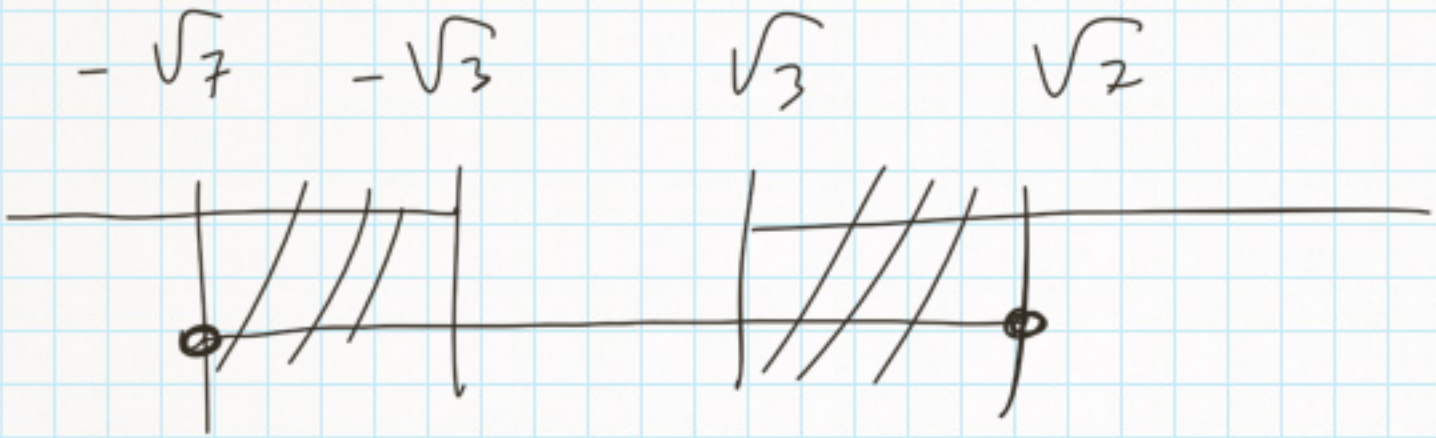
$$\begin{cases} x > 0 \\ 3^{\log_3 x} \geq 3^{12} \end{cases} \qquad \begin{cases} x > 0 \\ x \geq 3^{12} \end{cases} \Rightarrow x \geq 3^{12}$$

$$\log_2 (x^2 - 3) \leq 2$$

$$\begin{cases} x^2 - 3 > 0 \\ x^2 - 3 \leq 2^2 = 4 \end{cases}$$

Applico l'esponenzial di base $2 > 1$

$$\begin{cases} x^2 - 3 > 0 \\ x^2 - 7 \leq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x < -\sqrt{3} \vee x > \sqrt{3} \\ -\sqrt{7} \leq x \leq \sqrt{7} \end{cases}$$



$$-\sqrt{7} \le x < \sqrt{3} \quad \vee \quad \sqrt{3} < x \le \sqrt{7}$$

$$\log_{\frac{1}{4}}(x^2 - x) > 0 \qquad \boxed{0 < \frac{1}{4} < 1}$$

$$\begin{cases} x^2 - x > 0 \\ x^2 - x < \left(\frac{1}{4}\right)^0 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 - x > 0 \\ x^2 - x - 1 < 0 \end{cases}$$

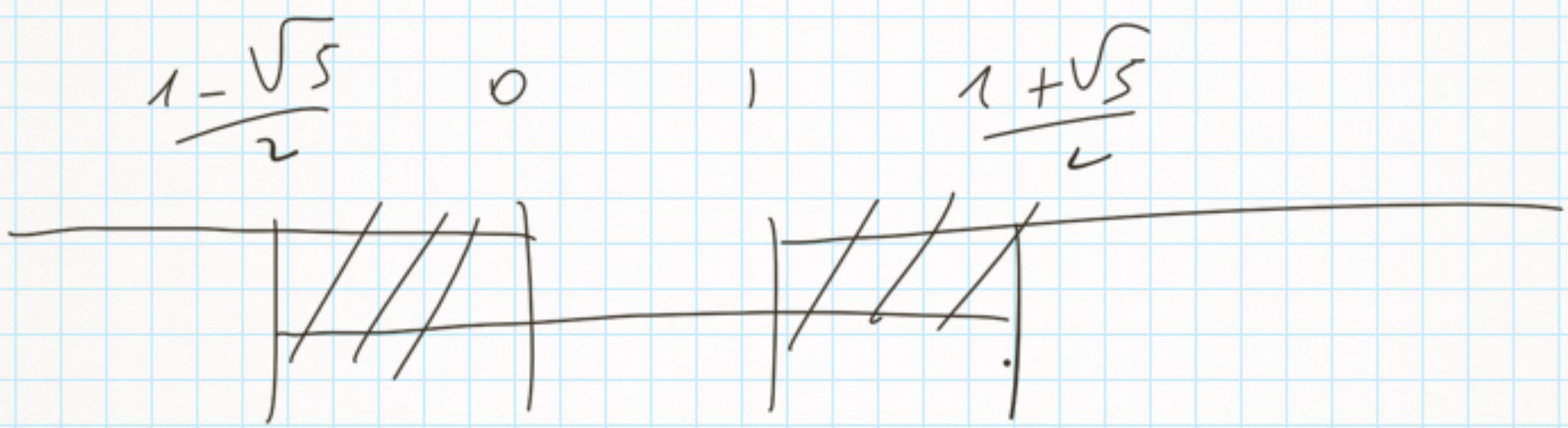
- $x^2 - x > 0$

$x(x-1) > 0 \iff x < 0 \lor x > 1$

$x(x-1) = 0 \iff x = 0 \lor x = 1$

- $x^2 - x - 1 < 0 \iff \frac{1-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$



$\frac{1-\sqrt{5}}{2} < x < 0 \quad \lor \quad 1 < x < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

- $\log_3^2 x - 3\log_3 x \geq 0$

$\left(\log^2 x = (\log x)^2 \neq \log(x^2) \right)$

Si risolve per sostituzione, $y = \log_3 x$

$y^2 - 3y \geq 0$

$y^2 - 3y = 0 \qquad y(y-3) = 0 \quad \begin{cases} y = 0 \\ y = 3 \end{cases}$

Allora

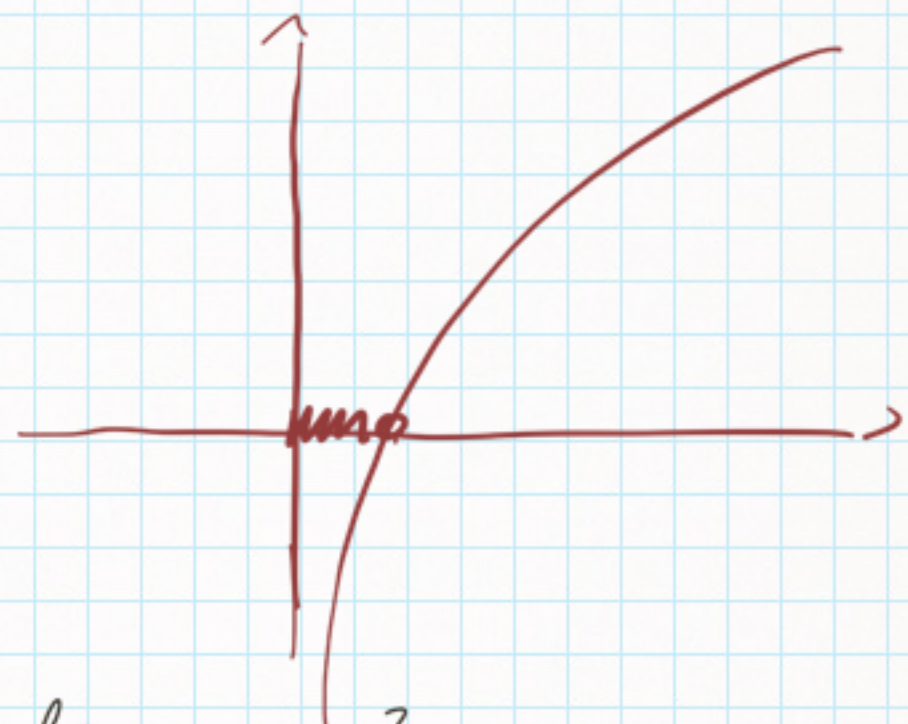
$y^2 - 3y \geq 0 \iff y \leq 0 \vee y \geq 3$

Ritorniamo alla variabile iniziale

$\log_3 x \leq 0 \quad \vee \quad \log_3 x \geq 3$

$$\log_3 x \leq 0 \qquad \begin{cases} x > 0 \\ x \leq 3^0 = 1 \end{cases} \quad \boxed{0 < x \leq 1}$$

la base è $3>1$, quindi la disuguaglianza non cambia verso



$$\log_3 x \geq 3 \Rightarrow 3^{\log_3 x} \geq 3^3 \Rightarrow x \geq 27$$

($x>0$ SUPERFLUO)

Le soluzioni sono

$$0 < x \leq 1 \quad \vee \quad x \geq 27$$

A CASA

$$\log^2_{\frac{1}{2}} x - 5\log_{\frac{1}{2}} x + 6 \leq 0$$

soluzioni $\quad \frac{1}{8} \leq x \leq \frac{1}{4}$

- $\log_3\left(\frac{x+1}{x-1}\right) < 1$

$3>1$
il verso
della disuguaglianza
rimane lo
stesso.

$$\begin{cases} \frac{x+1}{x-1} > 0 \\ \frac{x+1}{x-1} < 3^1 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x+1}{x-1} > 0 \\ \frac{x+1}{x-1} - 3 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x+1}{x-1} > 0 \\ \frac{x+1-3x+3}{x-1} < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{x+1}{x-1} > 0 \\[2ex] \dfrac{-2x+4}{x-1} < 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{x+1}{x-1} > 0 & (1) \\[2ex] \dfrac{2x-4}{x-1} > 0 & (2) \end{cases}$$

$\downarrow$

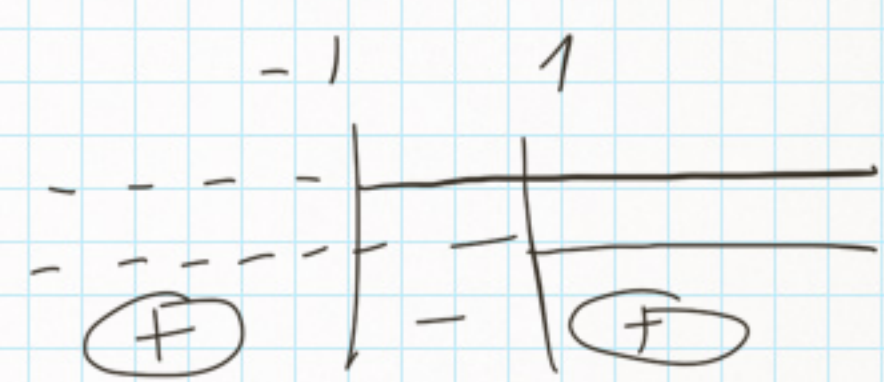
moltiplico per -1 e cambiamo verso alla disuguaglianza

Risolviamo la (1)

$$\frac{x+1}{x-1} > 0$$

$x+1 > 0 \Rightarrow x > -1$

$x-1 > 0 \Rightarrow x > 1$



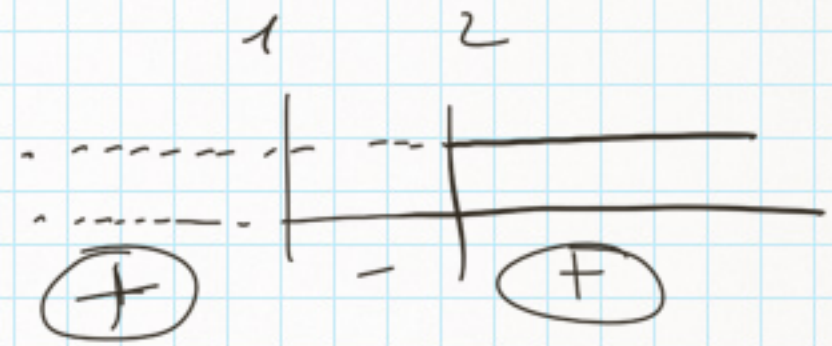
$$\boxed{x < -1 \ \vee \ x > 1}$$

Risolviamo la ②

$$\frac{2x-4}{x-1}>0$$

$2x-4>0 \Rightarrow x>2$

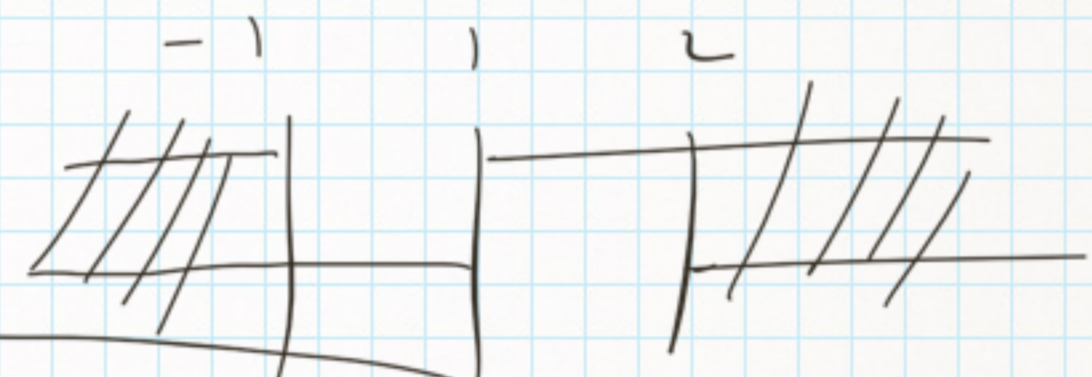
$x-1>0 \Rightarrow x>1$



Soluzioni: $x<1 \vee x>2$

Devo risolvere il sistema

$$\begin{cases} x<-1 \vee x>1 \\ x<1 \vee x>2 \end{cases}$$



Soluzioni sistema: $\boxed{x<-1 \vee x>2}$

A CASA

$$\frac{3^{2x} - 2\,3^{x}}{1 - 4^{x}} > 0$$