MATEMATICA - LEZIONE 10

mercoledì 15 ottobre 2025 09:04

Def: Sia $f: X \longrightarrow Y$ una funzione

1) Si dice che f è INIETTIVA se:
$\forall x_1, x_2 \in X: \quad x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$
(equivalentemente: $f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$)

2) Si dice che f è SURIETTIVA se
$\forall y \in Y \ \exists x \in X$ t.c. $f(x) = y$
cioè se $f(X) = Y$

3) Si dice che f è BIETTIVA se è sia iniettiva che suriettiva
(cioè $\forall y \in Y \ \exists! \ x \in X$ t.c. $f(x) = y$)

OSS

Se $f: X \longrightarrow Y$ è una funzione, allora $f: X \longrightarrow f(X)$ è suriettiva.

Def Sia $f: X \longrightarrow Y$ una funzione e sia $A \subseteq X$. Si definisce RESTRIZIONE di f ad A la funzione $f|_A : A \longrightarrow Y$
$$x \longmapsto f(x)$$

Def: Siano X, Y, Z, W insiemi. Siano $f: X \to Y$ e $g: Z \to W$ funzioni. Se $f(X) \subseteq Z$, allora definiamo COMPOSIZIONE DI f E g la funzione:

$$g \circ f : \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & W \\ x & \longmapsto & g(f(x)) \end{array}$$

ESEMPI

1) $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & x+1 \end{array}$ $\qquad g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$

$$g \circ f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & g(f(x)) = (f(x))^2 = (x+1)^2 \end{array}$$

2) $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & x+1 \end{array}$ $\qquad g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow &]0, +\infty[\\ x & \longmapsto & 2^x \end{array}$

$$g \circ f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow &]0, +\infty[\\ x & \longrightarrow & 2^{x+1} \end{array}$$

3) $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x-2 \end{array}$ $\qquad g: \begin{array}{ccc} [0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$

Siccome $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \not\subseteq [0, +\infty[$

Non posso definire $g \circ f$.

Però se consideriamo

$$f|_{[2,+\infty[} : \begin{array}{ccc} [2, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & x-2 \end{array}$$

Allora $f|_{[2,+\infty[}([2,+\infty[) = [0, +\infty[$ (dominio di g)

$$g \circ f|_{[2,+\infty[} : [2,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \sqrt{x-2}$$

Attenzione $g \circ f \neq f \circ g$

ESEMPIO

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto x-2 \qquad x \longrightarrow x^2$$

$$g \circ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow (x-2)^2 = x^2 - 4x + 4$$

Mentre

$$f \circ g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto x^2 - 2$$

Def: Siano $f : X \longrightarrow Y$ e $g : Y \longrightarrow X$

Si dice che g è L'INVERSA DI f (o LA FUNZIONE INVERSA DI f) se

1) $\forall x \in X$: $g \circ f(x) = x$ (cioè $g(f(x)) = x$)
2) $\forall y \in Y$: $f \circ g(y) = y$ (cioè $f(g(y)) = y$)

Def Sia $f : X \longrightarrow Y$ si dice INVERTIBILE se $\exists$ la funzione inversa, cioè se $\exists\, g : Y \longrightarrow X$ t.c. $\forall x \in X, y \in Y$: $g(f(x)) = x$ e $f(g(y)) = y$.

TEOREMA

Sia $f: X \to Y$ una funzione.

Allora f è invertibile $\Leftrightarrow$ f è biettiva

In tal caso la funzione inversa si indica con

$$f^{-1}: Y \to X$$
$$y \longmapsto \underbrace{\text{unica } x}_{\text{esiste perché } f \text{ è biettiva}} \text{ t.c. } f(x) = y$$

Funzioni reali di variabile reale

Sono le funzioni $f: X \to Y$ con $X, Y \subseteq \mathbb{R}$

Def: Sia $f: X \to Y$ una funzione con $X, Y \subseteq \mathbb{R}$

Si definisce GRAFICO di f l'insieme

$$\mathcal{G}(f) := \{ (x, f(x)) \mid x \in X \}$$
$$= \{ (x, y) \mid x \in X, \underbrace{y = f(x)}_{\text{EQUAZIONE DEL GRAFICO}} \}$$

OSS Se $X, Y \subseteq \mathbb{R}$, $\mathcal{G}(f) \subseteq X \times Y \subseteq \mathbb{R}^2$

Possiamo rappresentare il grafico su un piano.

ESEMPI

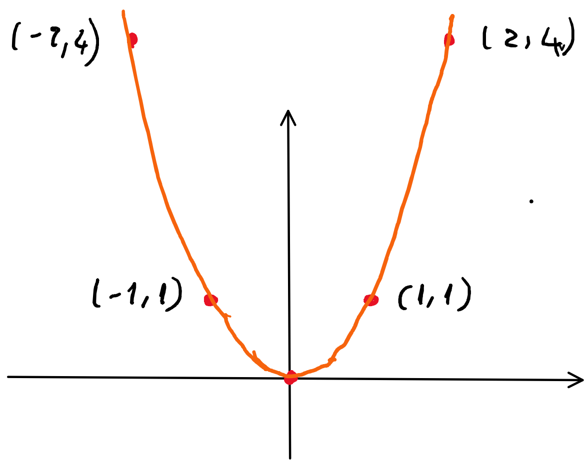
1) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$\quad x \to x^2$

$x = 1 : \ f(x) = 1 \qquad (1,1) \in \mathcal{G}(f)$

$x = 0 : \ f(x) = 0 \qquad (0,0) \in \mathcal{G}(f)$

$x = 1 : \ f(x) = 1 \qquad (1,1) \in \mathcal{G}(f)$

$x = 2 : \ f(x) = 4 \qquad (2,4) \in \mathcal{G}(f)$

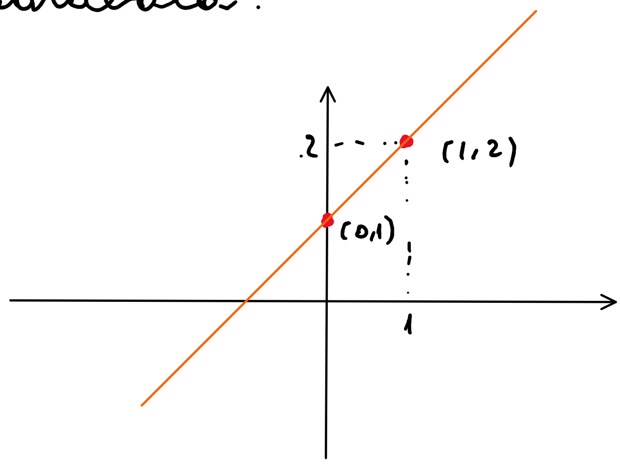


Il grafico è una parabola.

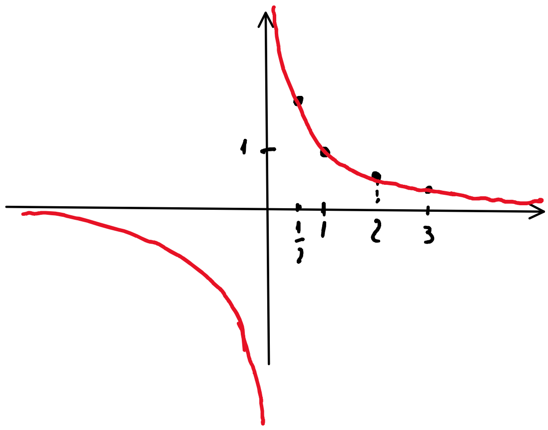
2) $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x+1 \end{array}$

$(0, 1) \in \mathcal{G}(f)$

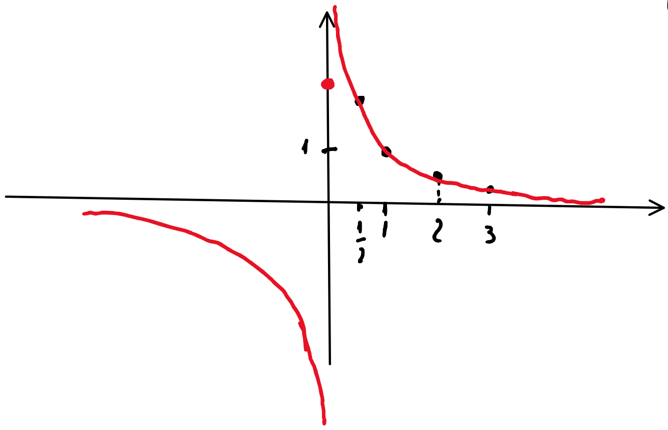
$(1, 2) \in \mathcal{G}(f)$



3) $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\setminus\{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x} \end{array}$



4) $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 2 & x = 0 \end{cases}$



I concetti di iniettività e suriettività hanno un'interpretazione grafica.

Sia $f: X \longrightarrow Y$ con $X, Y \subseteq \mathbb{R}$. Allora:

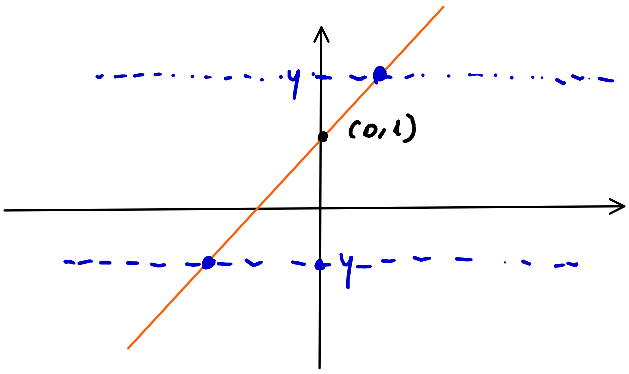
f è iniettiva $\iff$ $\forall y \in Y$ la retta orizzontale ad altezza y interseca il grafico di f al più una volta

f è suriettiva $\iff$ $\forall y \in Y$ la retta orizzontale ad altezza y interseca il grafico di f almeno una volta

f è biettiva (o invertibile) $\iff$ $\forall y \in Y$ la retta orizzontale ad altezza y interseca il grafico di f in un solo punto.

ESEMPI

1) $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longrightarrow x+1$



f è biettiva quindi invertibile. Per trovare l'inversa basta risolvere l'equazione

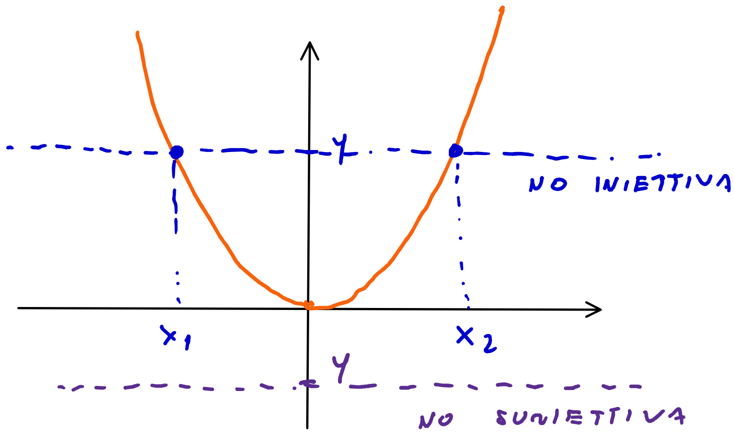
$f(x) = y$

$x + 1 = y$

$x = y - 1$

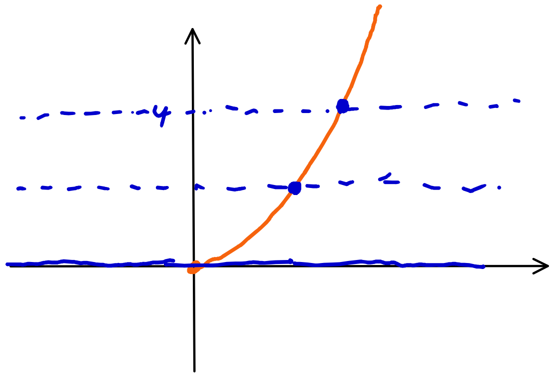
$f^{-1}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$y \longrightarrow y - 1$.

2) $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$\quad x \longrightarrow x^2$



f non è iniettiva
f non è suriettiva

3) $f: [0,+\infty[\longrightarrow [0,+\infty[$
$\quad x \longmapsto x^2$



f è iniettiva e suriettiva e quindi è invertibile.

Per trovare l'inversa bisogna risolvere
$x^2 = y$ con le condizioni $x, y \geq 0$.

$x = \sqrt{y} \quad \vee \quad \cancel{x = -\sqrt{y}}$ con $x, y \geq 0$
$(x \geq 0)$

$x = \sqrt{y}$

$f^{-1}: [0,+\infty[\longrightarrow [0,+\infty[$
$\quad y \longmapsto \sqrt{y}$

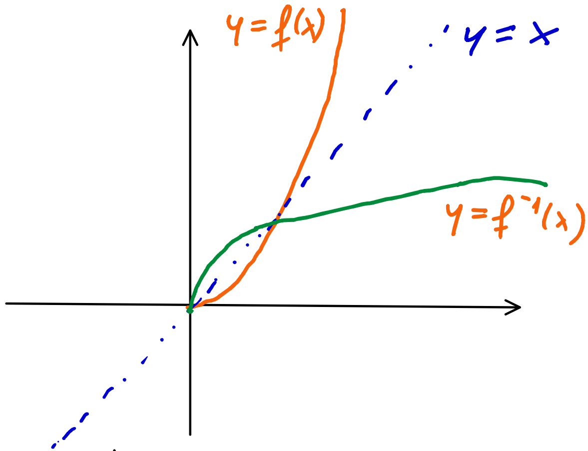
$f^{-1}(y) = \sqrt{y}$
$f^{-1}(x) = \sqrt{x}$

OSS Se $f: X \longrightarrow Y$ è invertibile, allora:
$(x, y) \in \mathcal{G}(f) \iff y = f(x)$

$$\iff x = f^{-1}(y)$$

$$\iff (y, x) \in \mathcal{G}(f^{-1})$$

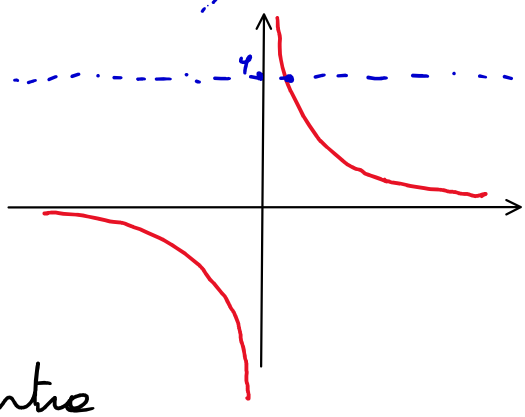
Cioè il grafico di f^{-1} è il simmetrico del grafico di f rispetto alla bisettrice $y = x$.



- $f: [0, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[$
  $\quad x \longmapsto x^2$

  $f^{-1}: [0, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[$
  $\quad x \longmapsto \sqrt{x}$

- $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$
  $\quad x \longmapsto \dfrac{1}{x}$



f è iniettiva

f non è suriettiva
(la retta $y = 0$ non incontra il grafico)

Però $\tilde{f}: \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$\quad x \longmapsto \dfrac{1}{x}$

$\tilde{f}$ è suriettiva

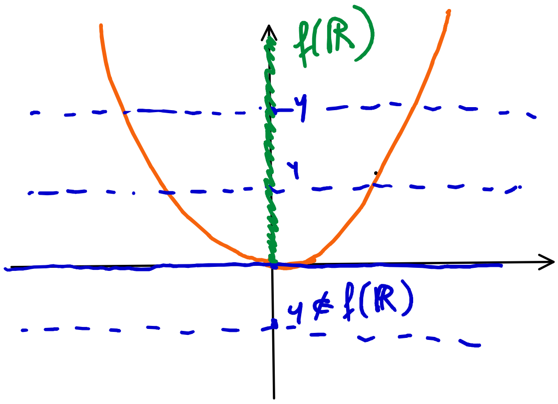
Chi è $\tilde{f}^{-1}$?

$\dfrac{1}{x} = y \iff x = \dfrac{1}{y}$ $\qquad \tilde{f}^{-1}: \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$\quad y \longmapsto \dfrac{1}{y} = \tilde{f}(y)$

Quindi $\tilde{f} = \tilde{f}^{-1}$.

OSS Se $f: X \longrightarrow Y$ con $X, Y \subseteq \mathbb{R}$. Allora

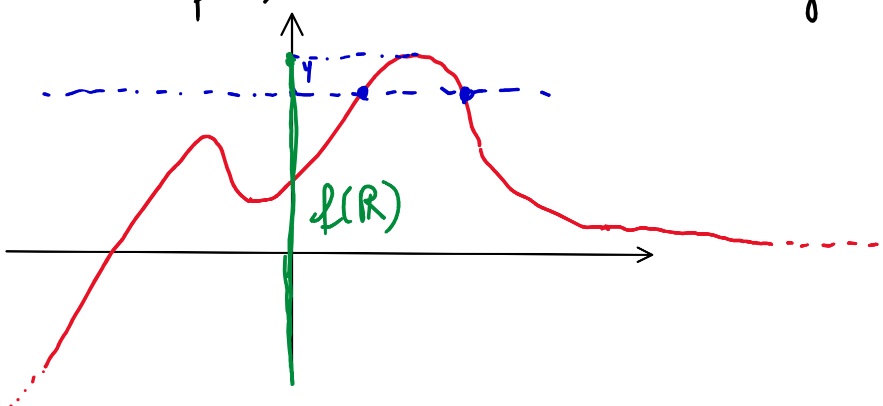
$f(X) = \{ y \in Y \mid$ la retta orizz. ad altezza y interseca il grafico di $f \}$



$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow x^2$$

$$f(\mathbb{R}) = [0, +\infty[$$

Sia $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ di grafico:



PROPRIETÀ DELLE FUNZIONI

1) Funzioni Monotone

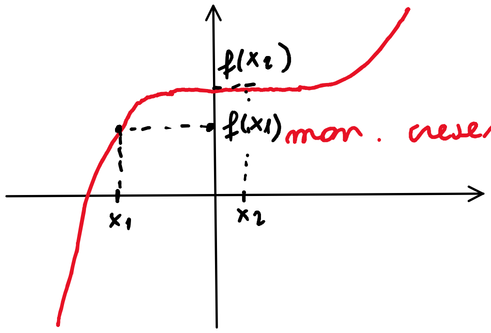
Def 1: Sia $f: X \longrightarrow Y$ con $X, Y \subseteq \mathbb{R}$.

1) Si dice che f è MONOTONA CRESCENTE (in X)
se $\forall x_1, x_2 \in X$: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$
(o $x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$)

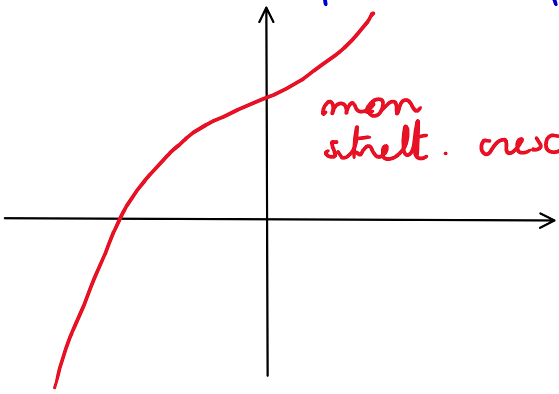
2) Si dice che f è MONOTONA STRETTAMENTE CRESCENTE
se $\forall x_1, x_2 \in X$: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

3) Si dice che f è MONOTONA DECRESCENTE (in X)
se $\forall x_1, x_2 \in X: \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$
$\left(\text{o } x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2) \right)$

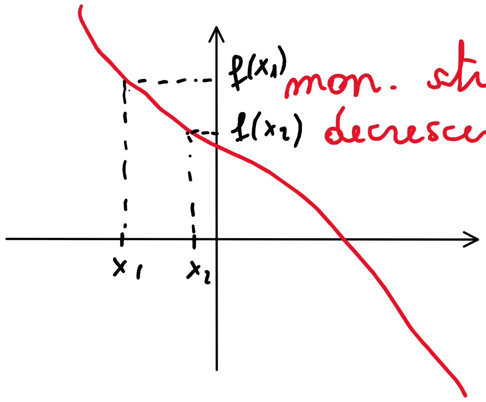
4) Si dice che f è MONOTONA STRETTAMENTE DECRESCENTE
se $\forall x_1, x_2 \in X: \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$



mon. crescente



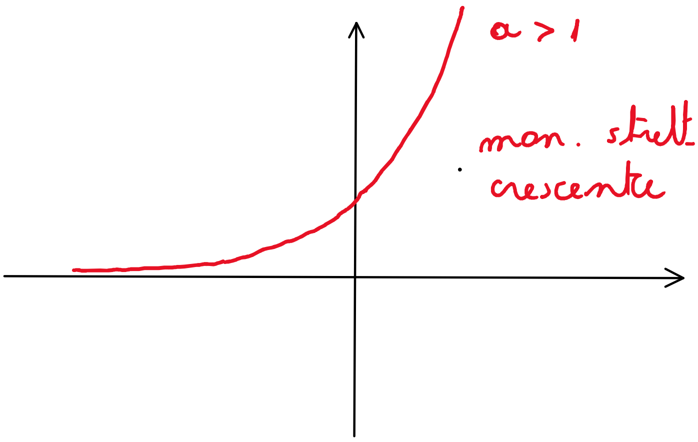
mon strett. crescente.



mon. strett. decrescente.

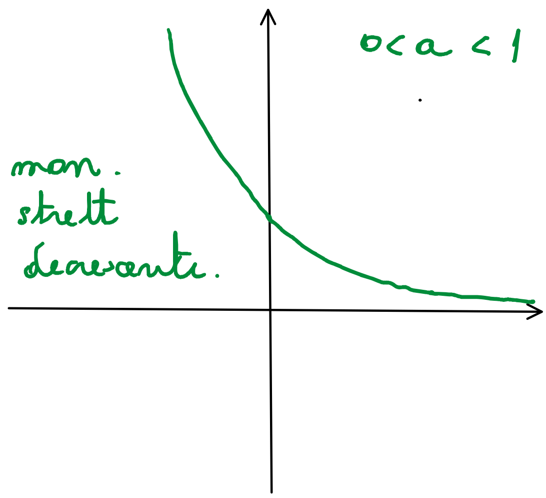
$$f(x) = a^x$$

$a > 1$



mon. strett. crescente

$0 < a < 1$



mon. strett decrescente.

2) Simmetria di un grafico. (pari / dispari)

Def: Sia X un insieme. Si dice che X è SIMMETRICO RISPETTO a 0 se

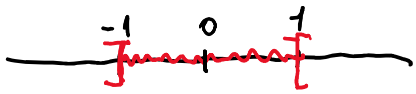
$$\forall x \in X : -x \in X$$

$$(\text{o} \quad x \in X \iff -x \in X)$$

ESEMPI

1) $]-1, 1[$ è simmetrico.
2) $[-3, 4]$ non è simmetrico
3) $\mathbb{Q}$ è simmetrico.
4) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$
5) $[-2, -1] \cup [1, 2]$ è simmetrico
6) $[-2, 2[$ NON è simmetrico

$$\left(x \in]-1, 1[\iff -1 < x < 1 \right.$$



$$\iff \begin{cases} x < 1 \\ x > -1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -x > -1 \\ -x < 1 \end{cases}$$

$$\left. \iff -1 < -x < 1 \iff -x \in]-1, 1[\right)$$

$$\left(x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \iff x \neq 0 \iff -x \neq 0 \iff -x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right)$$

Def: Sia X un insieme simmetrico rispetto a 0 e sia $f : X \longrightarrow Y \subseteq \mathbb{R}$.

1) Si dice che f è PARI se:

$$\forall x \in X : \quad f(-x) = f(x)$$

2) Si dice che f è DISPARI se:
$\forall x \in X: \quad f(-x) = -f(x)$.

ESEMPI

1) $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$\quad x \longrightarrow x^2$

$\mathbb{R}$ è simmetrico
e $\forall x \in \mathbb{R}: \quad f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$
f è pari

2) $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$\quad x \longmapsto x^3$

$\mathbb{R}$ è simmetrico
$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$
f è dispari.

3) $f: \mathbb{R}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$
$\quad x \longmapsto \frac{1}{x}$

$\mathbb{R}\setminus\{0\}$ è simmetrico
$f(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -f(x)$
è dispari.

4) $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$\quad x \longmapsto x+1$

$\mathbb{R}$ è simmetrico
$f(-x) = -x+1$
$-f(x) = -(x+1) = -x-1$

quindi $f(-x) \neq f(x)$
$\neq -f(x)$

f non è né pari né dispari.

OSS

f è pari $\iff$ il grafico di f è simmetrico rispetto all'asse y (cioè non cambia se ribaltato rispetto all'asse y)

f è dispari $\iff$ $G_f(f)$ è simmetrico rispetto all'origine.