MATEMATICA - LEZIONE 9

lunedì 13 ottobre 2025 09:02

TEOREMA (TEOREMA DI ESISTENZA DEI LOGARITMI)

Sia $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$. Sia $y \in \mathbb{R}$ $y > 0$. Allora $\exists! \, x \in \mathbb{R}$ t.c. $a^x = y$.

Def Nelle ipotesi del teorema il numero x si dice LOGARITMO in base a di y e si indica con $\log_a y$

ESEMPI

$$\log_5(125) = \log_5(5^3) = 3$$

$$\ln(e^{-4}) = \log_e(e^{-4}) = -4$$

$$\log_4\left(\frac{1}{32}\right) = \log_4(2^{-5})$$

$$= \log_4\left(\left(4^{\frac{1}{2}}\right)^{-5}\right) = \log_4\left(4^{-\frac{5}{2}}\right) = -\frac{5}{2}$$

PROPRIETÀ DEI LOGARITMI

Sia $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$.

0) $\log_a 1 = 0$, $\log_a a = 1$

1) $\forall x \in \mathbb{R}$: $\log_a a^x = x$

2) $\forall x \in \mathbb{R}$, $x > 0$: $a^{\log_a x} = x$

3) $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x, y > 0$:

$$\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$$

4) $\forall x \in \mathbb{R},\ x > 0$: $\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x$

5) $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x, y > 0$:

$$\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

6) $\log_a (b^x) = x \cdot \log_a b$

$\forall b \in \mathbb{R},\ b > 0$.

7) $\forall x \in \mathbb{R},\ x > 0,\ x \neq 1$:

$$\log_a x = \frac{1}{\log_x a}$$

8) $\forall b \in \mathbb{R},\ b > 0,\ b \neq 1$ e $\forall x \in \mathbb{R},\ x > 0$:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

Tutte queste proprietà si dimostrano a partire dalle proprietà delle potenze

ESEMPI

- $\log_3 (81^{25}) = 25 \log_3 81 = 25 \cdot 4 = 100$

oppure

$$\log_3(81^{25}) = \frac{\log_{81}(81^{25})}{\log_{81} 3}$$

$$= \log_{81}(81^{25}) \cdot \log_3 81$$

$$= 25 \cdot 4 = 100$$

Ricordare

1) $\log_a y$ è definito solo se $\underline{y > 0}$,
e $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$.

2) Per definizione

$$\underbrace{a^x = y}_{} \iff x = \log_a y$$

$\log_a a^x = \log_a y$ $\qquad$ $a^x = a^{\log_a y}$

$x = \log_a y$ $\qquad$ $a^x = y$.

Attenzione:

· Non c'è una formula per $\log_a(x \pm y)$

Equazioni e disequazioni con esponenziali e logaritmi:

ESEMPI

1) $2 \cdot 3^x = 1$

$$3^x = \frac{1}{2}$$

$$\log_3 3^x = \log_3 \frac{1}{2}$$

$$x = \log_3 \frac{1}{2}$$

$$x = -\log_3 2$$

oss Priorità delle operazioni:

- $2 \cdot 3^x + 5 = (2 \cdot (3^x) + 5)$
- $2 \cdot 3^x = 2 \cdot (3^x)$

$$\neq$$

$$\cancel{(2 \cdot 3)^x}$$

2) $$e^{3x} = 5$$

$$\ln e^{3x} = \ln 5$$

$$3x = \ln 5$$

$$x = \frac{1}{3} \ln 5$$

3) $$e^{x^2-2} = -3$$

È impossibile perché $e^{x^2-2} > 0$.

4) $$e^{2x} = 2^{x-1}$$

$$\ln e^{2x} = \ln 2^{x-1}$$

$$2x = (x-1)\ln 2$$

$$2x = x \ln 2 - \ln 2$$

$$2x - x \ln 2 = -\ln 2$$
$$x(2-\ln 2) = -\ln 2$$
$$x = \frac{-\ln 2}{2-\ln 2}.$$

5) $2^{2x} = 6 \cdot 2^x - 8$

$$\underbrace{2^{2x}}_{(2^x)^2} - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$$

Sostituzione $t = 2^x$

$$t^2 - 6t + 8 = 0$$
$$t_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9-8} = 3 \pm 1 \begin{cases} 2 \\ 4 \end{cases}$$
$$t = 2 \quad \vee \quad t = 4$$
$$2^x = 2 \quad \vee \quad 2^x = 4$$
$$x = 1 \quad \vee \quad x = 2$$
$$(\log_2 2 = 1) \qquad (\log_2 4 = 2)$$

6) $\log_2 x = -3$

c.e. (condizioni di esistenza): $x > 0$.

$$2^{\log_2 x} = 2^{-3}$$
$$x = 2^{-3}$$
$$x = \frac{1}{8}$$

7) $3\cdot\underbrace{\log_3^2 x}_{} - \log_3 x - 2 = 0$

Significa $(\log_3 x)^2 \neq \log_3 x^2 = \log_3(x^2)$

c.e: $x > 0$.

Sostituzione : $t = \log_3 x$

$3t^2 - t - 2 = 0$

$$t_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{6} = \begin{cases} 1 \\ -\frac{2}{3} \end{cases}$$

$t = 1 \quad \vee \quad t = -\frac{2}{3}$

$\log_3 x = 1 \quad \vee \quad \log_3 x = -\frac{2}{3}$

$3^{\log_3 x} = 3^1 \qquad 3^{\log_3 x} = 3^{-\frac{2}{3}}$

$x = 3 \qquad x = 3^{-\frac{2}{3}}$

$x = \frac{1}{\sqrt[3]{9}}$

Metodo per le disequazioni

- Sia $a \in \mathbb{R}$, $\boxed{a > 1}$:

$\forall x, y \in \mathbb{R},\ y > 0$:

$a^x \geq y \iff x \geq \log_a y$

$a^x \leq y \iff x \leq \log_a y$

$a^x > y \iff x > \log_a y$

$a^x < y \iff x < \log_a y$

• Sia $a \in \mathbb{R}$, $\boxed{0 < a < 1}$:

$\forall x, y \in \mathbb{R}$, $x, y > 0$:

$$a^x \geq y \iff x \leq \log_a y$$
$$a^x \leq y \iff x \geq \log_a y$$
$$a^x > y \iff x < \log_a y$$
$$a^x < y \iff x > \log_a y$$

Ricordare:

- Se la base a è > 1, passando agli esponenziali in entrambi i membri o facendo i logaritmi di entrambi i membri di una disequazione si preservano le disuguaglianze.
- Se la base a è tra 0 e 1, passando agli esponenziali in entrambi i membri o facendo i logaritmi di entrambi i membri di una disequazione si invertono le disuguaglianze.

ESEMPI

1) $$3^{x+1} > 2$$

$$\log_3 3^{x+1} > \log_3 2$$

$$x+1 > \log_3 2$$

$$x > \log_3 2 - 1$$

2) $\ln x < 7$

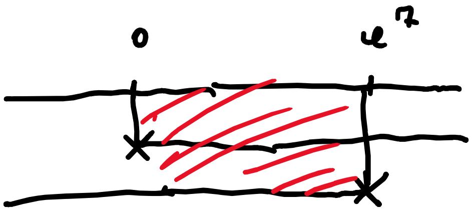
c.e : $x > 0$

$$\ln x < 7$$

$$e^{\ln x} < e^{7}$$

$$x < e^{7}$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ x < e^{7} \end{cases}$$



$$0 < x < e^{7}$$

OSS

$$\log_a x \le y \iff \begin{cases} \log_a x \le y \\ x > 0 \quad (c.e.) \end{cases}$$

3) $\log_{\frac{1}{3}} x < 2$

Attenzione:
$\frac{1}{3} \in]0,1[$

c.e : $x > 0$.

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_{\frac{1}{3}} x} > \left(\frac{1}{3}\right)^{2}$$

la base è $\frac{1}{3} \in]0,1[$
invertono i versi
delle disuguaglianze.

$x > \frac{1}{9}$

$$\begin{cases} x > \frac{1}{9} \\ x > 0 \end{cases}$$

$x > \frac{1}{9}$

4) $e^{2x-1} < e$

$\ln(e^{2x-1}) < \ln e$

$2x - 1 < 1$

$2x < 2$

$x < 1.$

5) $\left(\frac{1}{4}\right)^{2x-1} < \frac{1}{16}$

$\log_{\frac{1}{4}}\left(\left(\frac{1}{4}\right)^{2x-1}\right) > \log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{16}\right)$

$2x - 1 > 2$

$x > \frac{3}{2}$

Oppure

$\left(\frac{1}{4}\right)^{2x-1} < \frac{1}{16}$

$$\frac{1}{4^{2x-1}} < \frac{1}{16}$$

$$16 < 4^{2x-1}$$

$$4^{2x-1} > 16$$

$$2x-1 > \log_4 16$$

$$2x-1 > 2$$

$$x > \frac{3}{2}$$

6) $$2^x + 3 > 0$$

$$2^x > -3$$

Vera $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

Mentre

$$2^x + 3 \leq 0$$

$2^x \leq -3$ è impossibile

Funzioni

Def: Siano X, Y due insiemi. Una FUNZIONE di DOMINIO X e CODOMINIO Y è una legge che ad ogni elemento di X associa uno e un solo elemento di Y.

Notazioni:

- Una funzione di dominio X e codom. Y si indica con $\underbrace{f}_{\text{o un'altra lettera.}} : X \longrightarrow Y$

- $\forall x \in X$ indichiamo con $f(x)$ l'unico elemento di Y associato ad x tramite f. $f(x)$ si dice VALORE DI f IN x.

- L'insieme $\{ f(x) \mid x \in X \}$
$$= \{ y \in Y \mid \exists x \in X : f(x) = y \} \subseteq Y$$
si dice IMMAGINE di X tramite f e si indica con $f(\underbrace{X}_{\text{maiuscolo}})$ (o $\mathrm{Im}(f)$)

ESEMPI

1) $X = \{$ Bari , Brindisi, Roma, Milano$\}$
$Y = \{$ lettere dell'alfabeto italiano $\}$
$$f : X \longrightarrow Y$$
$$\underbrace{x}_{\text{città}} \longmapsto \text{lettera iniziale di } x$$

cioè:

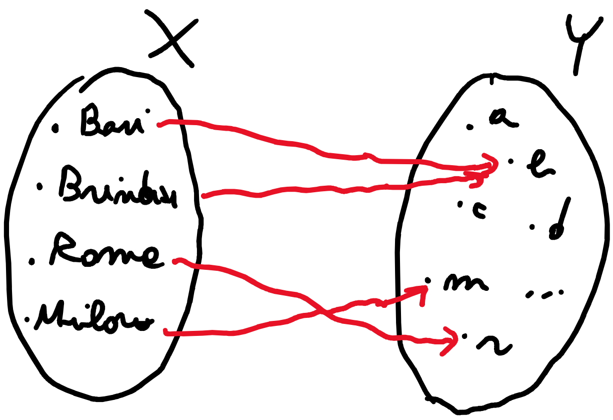
$f(\text{Bari}) = b$

$f(\text{Brindisi}) = b$

$f(\text{Roma}) = r$

$f(\text{Milano}) = m$

$f(X) = \{b, r, m\}$



2) $X = \{\text{Studenti UniBa}\}$

$Y = \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} f: X &\longrightarrow Y \\ x &\longmapsto \text{n. di matricola di } x \end{aligned}$$

3) $$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto e^x - 2 \end{aligned}$$

4) $$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\longmapsto \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ x &\longmapsto (2x, x-1) \end{aligned}$$

Tipi particolari di funzioni.

1) Se $X, Y \subseteq \mathbb{R}$, si dice che $f: X \to Y$ è una **FUNZIONE REALE DI VARIABILE REALE**

2) Se $X \subseteq \mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}$, $Y \subseteq \mathbb{R}$,
una funzione $f: X \longrightarrow Y$ si dice
FUNZIONE REALE DI PIÙ VARIABILI REALI

3) Se $X \subseteq \mathbb{R}$ è un intervallo e $Y \subseteq \mathbb{R}^n$
f è una "CURVA" IN $\mathbb{R}^n$

4) Se $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $Y \subseteq \mathbb{R}^m$. Se $f: X \longrightarrow Y$,
f È UN CAMPO VETTORIALE.

5) $X = \mathbb{N}$ e $Y \subseteq \mathbb{R}$. Se $f: X \longrightarrow Y$,
f è una SUCCESSIONE

Def: Sia $f: X \longrightarrow Y$ una funzione

1) Si dice che f è INIETTIVA se:
$\forall x_1, x_2 \in X$: $x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$
(equivalentemente: $f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$)

2) Si dice che f è SURIETTIVA se
$\forall y \in Y \; \exists x \in X$ t.c. $f(x) = y$
cioè se $f(X) = Y$

3) Si dice che f è BIETTIVA se è
sia iniettiva che suriettiva
(cioè $\forall y \in Y \; \exists! \; x \in X$ t.c. $f(x) = y$)

Nota: Su alcuni libri: INGETTIVA, SURGETTIVA, BIGETTIVA (O BIUNIVOCA).

ESEMPI

1) $f: \{\text{Studenti UniBa}\} \longrightarrow \mathbb{N}$

$x \longmapsto$ n. di matricola.

è iniettiva? SI

è suriettiva? NO

2) $X = \{\text{Bari}, \text{Brindisi}, \text{Roma}, \text{Milano}\}$

$Y = \{\text{lettere}\}$

$f: X \longrightarrow Y$

$x \longmapsto$ iniziale di x

è iniettiva: NO $\quad f(\text{Bari}) = f(\text{Brindisi})$

è suriettiva: NO $\quad \nexists\, x \in X$ t.c. $f(x) = c$.

OSS Le proprietà di una funzione dipendono anche da come sono scelti dominio e codominio.

3) $X = \{\text{Bari}, \text{Brindisi}, \text{Roma}, \text{Milano}\}$

$Y = \{b, r, m\}$

$f: X \longrightarrow Y$

$x \longmapsto$ lettera iniziale di x

iniettiva NO

suriettiva SI

4) $X = \{ \text{Bari}, \text{Roma}, \text{Milano} \}$

$Y = \{ b, r, m \}$

$$f : X \longrightarrow Y$$
$$x \longmapsto \text{lettera iniziale}$$

iniettiva SI

suriettiva SI

5) $$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto x + 1.$$

è iniettiva? SI

Infatti: se x_1, x_2:

$$f(x_1) = f(x_2) \iff x_1 + \cancel{1} = x_2 \cancel{+1}$$
$$\implies x_1 = x_2$$

Quindi $x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$.

è suriettiva? SI

Infatti: $\forall y \in \mathbb{R}$:

$$f(y-1) = y - 1 + 1 = y.$$

$(f(x) = y \iff x + 1 = y \iff x = y - 1)$.

f è biettiva.

6) $$f : \mathbb{R} \longrightarrow [0, +\infty[$$
$$x \longmapsto x^2$$

f è iniettiva? NO.

Ad esempio $f(-2) = 4 = f(2)$

f è suriettiva? SI

$\forall y \in [0, +\infty[\quad \exists \sqrt{y} \in \mathbb{R}$ e $f(\sqrt{y}) = (\sqrt{y})^2 = y$.