MATEMATICA - LEZIONE 9

mercoledì 16 ottobre 2024 09:10

Funzioni

Def: Siano X e Y due insiemi. Una **FUNZIONE** di dominio X e **CODOMINIO** Y è una legge che associa ad ogni elemento di X un'unico elemento di Y.

Notazioni:

- le funzioni si indicano con:

  $f: X \longrightarrow Y$ (f è una funzione di dominio X e codominio Y)

- Dato $x \in X$, l'unico $y \in Y$ che corrisponde ad x si indica con $f(x)$. ($y = f(x)$)

  $f(x)$ si dice **VALORE** di f in x (o **IMMAGINE** di x tramite f).

ESEMPI

1) $X = \{\text{studenti UNIBA}\} \longrightarrow \mathbb{N}$

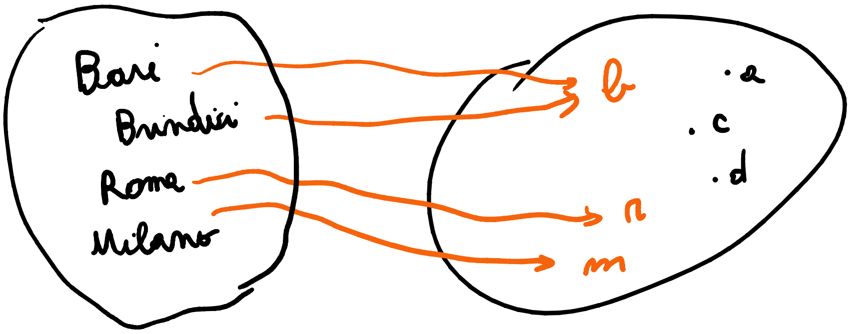
   $x \longmapsto$ n. di matricola

2) $X = \{\text{Bari, Brindisi, Roma, Milano}\}$

   $Y = \{\text{lettere dell'alfabeto}\}$

   $f: X \longrightarrow Y$

   $x \longmapsto$ lettera iniziale



- $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

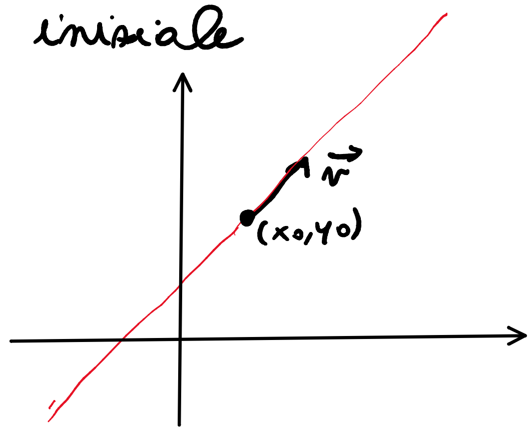
$$x \longmapsto (2x,\ x-1)$$

Cioè

$$1 \longmapsto (2, 0)$$
$$2 \longmapsto (4, 1)$$
$$3 \longmapsto (6, 2)$$
$$\tfrac{1}{2} \longmapsto \left(1, -\tfrac{1}{2}\right)$$

- Un punto che si muove sul piano con velocità costante $\vec{v} = (v_1, v_2)$ e posizione iniziale (x_0, y_0) soddisfa la legge oraria:

$$x(t) = x_0 + v_1 t$$
$$y(t) = y_0 + v_2 t$$



Questa legge è una funzione

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$t \longmapsto (x_0 + v_1 t,\ y_0 + v_2 t)$$

Def: Siano X e Y due insiemi e sia $f: X \longrightarrow Y$.

1) Si dice che f è INIETTIVA (o INGETTIVA) se

$\forall x_1, x_2 \in X \quad : \quad f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$

(Equivalentemente: $\forall x_1, x_2 \in X : \quad x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$)

2) Si dice che f è SURIETTIVA (o SURGETTIVA) se $\forall y \in Y \ \exists x \in X$ t.c. $f(x) = y$.

3) Si dice che f è BIETTIVA (o BIGETTIVA) se è sia iniettiva che suriettiva

Def: Sia $f: X \longrightarrow Y$ una funzione. Si definisce IMMAGINE DI f l'insieme

$$f(X) = \{ f(x) \mid x \in X \}$$

ESEMPI

1) $f: \{\text{studenti unibo}\} \longrightarrow \mathbb{N}$

$x \longmapsto$ n. di matricola.

f è iniettiva? SI

f è suriettiva? NO

2) $f: \{\text{Bari}, \text{Brindisi}, \text{Roma}, \text{Milano}\} \longrightarrow \{\text{lettere dell'alfabeto}\}$

$x \longmapsto$ iniziale di x

f è iniettiva? NO $\qquad f(\text{Bari}) = b = f(\text{Brindisi})$

f è suriettiva? NO $\qquad \nexists x \in X$ t.c. $f(x) = a$.

$f(X) = \{ b, r, m \}$

OSS Se $f: X \longrightarrow Y$ è una funzione:

f è suriettiva $\iff f(X) = Y$.

ESEMPI NUMERICI

1) $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x+1 \end{array}$ $\qquad X = \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{R}$.

- f è iniettiva? SI

  Se $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$: $\quad x_1 + \cancel{1} = x_2 + \cancel{1} \implies x_1 = x_2$.

- f è suriettiva? SI

  Se $y \in \mathbb{R}$ (codominio) allora $y-1 \in \mathbb{R}$ (dominio)

  e $f(y-1) = y-1+1 = y$. $\quad (f(\mathbb{R}) = \mathbb{R})$

- f è biettiva

2) $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$

- f è iniettiva? NO $\quad$ Ad esempio $f(-1) = f(1)$
- f è suriettiva? NO $\quad$ Ad esempio, se $y = -3$,

  $\nexists\, x \in \mathbb{R}$ t.c. $x^2 = -3$.

OSS Iniettività e suriettività sono legate alla risolubilità delle equazioni:

- f è suriettiva $\iff$ $\forall y \in Y$ esiste una soluzione $x \in X$ dell'equazione $f(x) = y$.
- f è iniettiva $\iff$ $\forall y \in Y$ $\exists$ al più un $x \in X$ t.c. $f(x) = y$.
- f è biettiva $\iff$ $\forall y \in Y$ l'equazione $f(x) = y$ ha un'unica soluzione in X.

Def: Sia $f: X \longrightarrow Y$ una funzione. Definiamo **GRAFICO** di f l'insieme:

$$\mathcal{G}(f) = \{ (x, f(x)) \mid x \in X \}$$

Notiamo che $\mathcal{G}(f) \subseteq X \times Y$.

OSS: Se $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ allora $\mathcal{G}(f) \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ possiamo rappresentarlo su un piano $(\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2)$

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto x^2$$

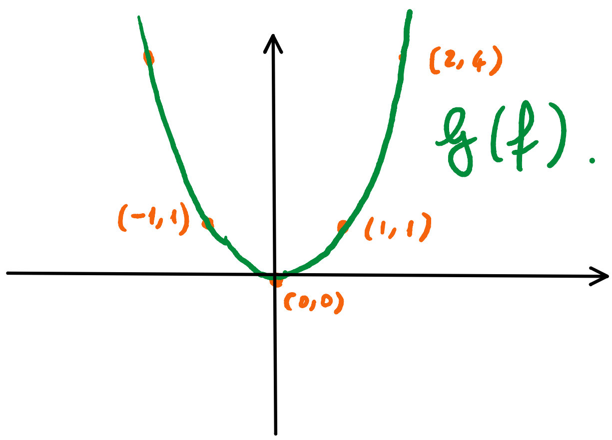
$0 \longrightarrow 0^2 = 0$

$1 \longrightarrow 1^2 = 1$

$-1 \longrightarrow (-1)^2 = 1$

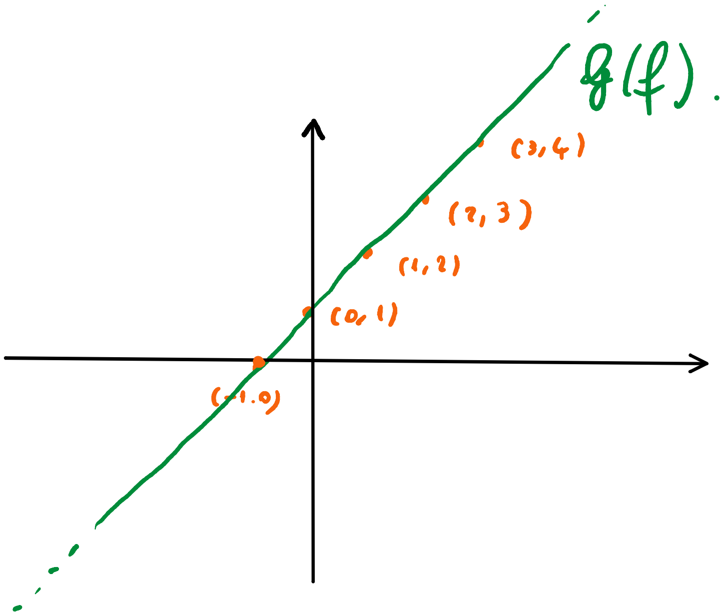
$2 \longrightarrow 4$

$-2 \longrightarrow 4$



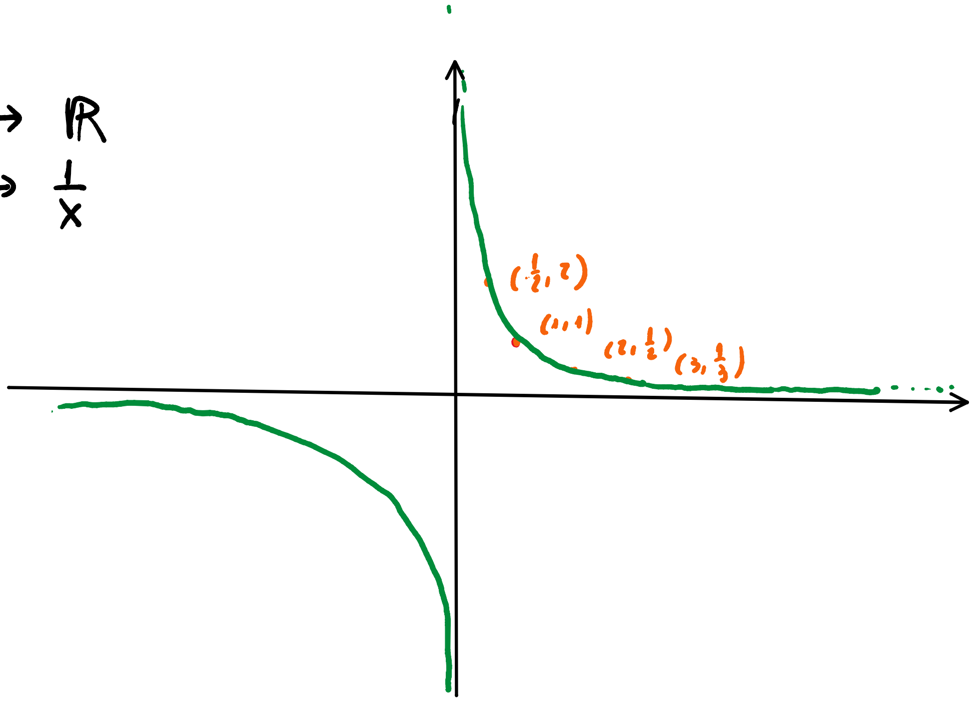
$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto x+1$$

$0 \longrightarrow 1$
$1 \longrightarrow 2$
$2 \longrightarrow 3$

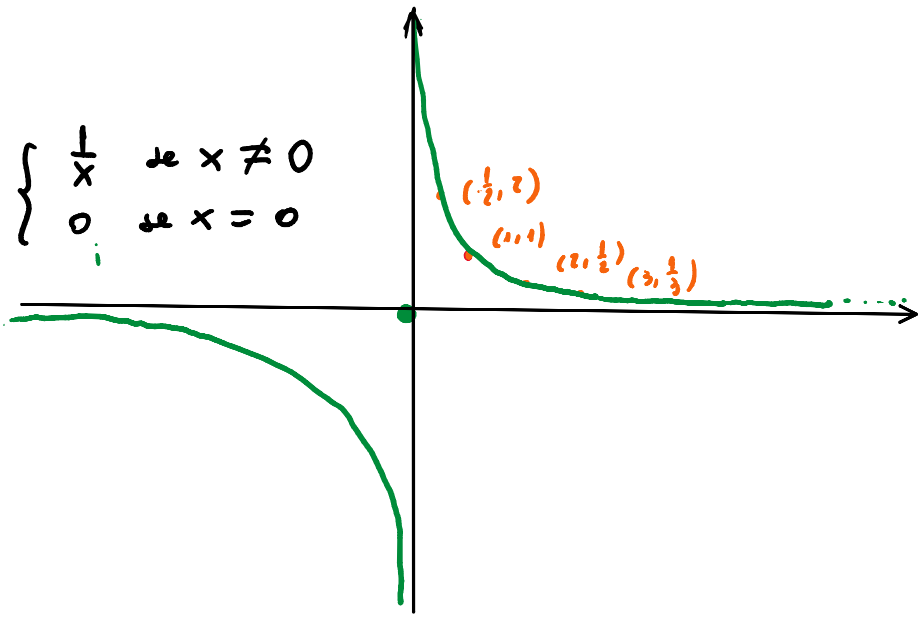


$$f: \mathbb{R}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{1}{x}$$

$1 \longrightarrow 1$
$2 \longrightarrow \frac{1}{2}$
$3 \longrightarrow \frac{1}{3}$
$-1 \longrightarrow -1$
$-2 \longrightarrow -\frac{1}{2}$



$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$



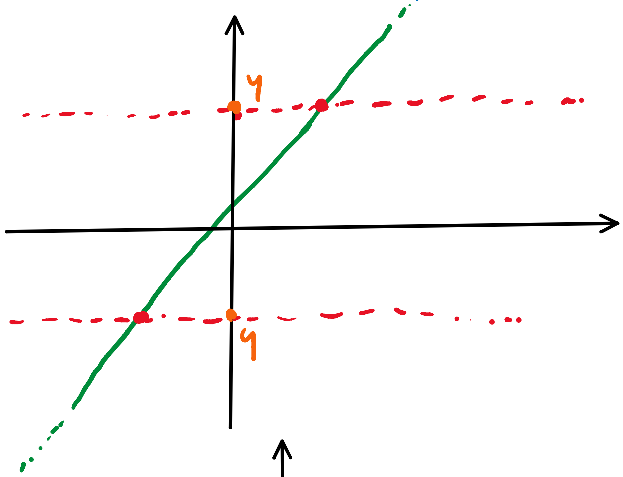
Utilizzando i grafici possiamo dare un'altra interpretazione di iniettività e suriettività.

Sia $f: X \longrightarrow Y$ con $X, Y \subseteq \mathbb{R}$, allora:

- f è suriettiva $\Longleftrightarrow$ $\forall y \in Y$, tracciando una retta orizzontale ad altezza y si interseca il grafico di f.
- f è iniettiva $\Longleftrightarrow$ $\forall y \in Y$, tracciando una retta orizz. ad altezza y si interseca il grafico di f al massimo una volta.
- f è biettiva $\Longleftrightarrow$ $\forall y \in Y$, tracciando una retta orizz. ad altezza y si interseca il grafico esattamente una volta

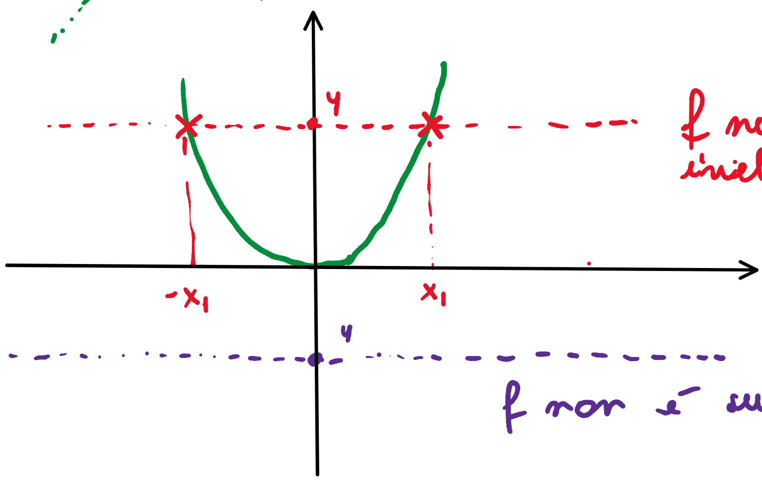
ESEMPI

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto x+1$$



f è biettiva

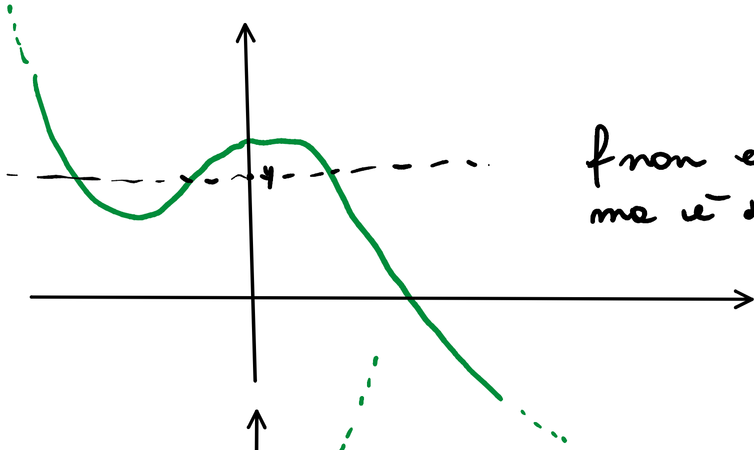
$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longrightarrow x^2$$



f non è iniettiva

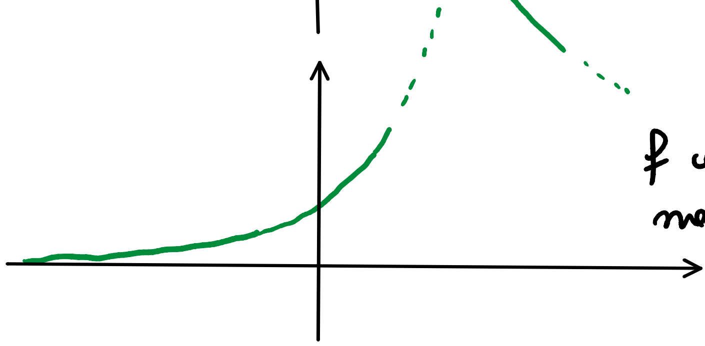
f non è suriettiva

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$



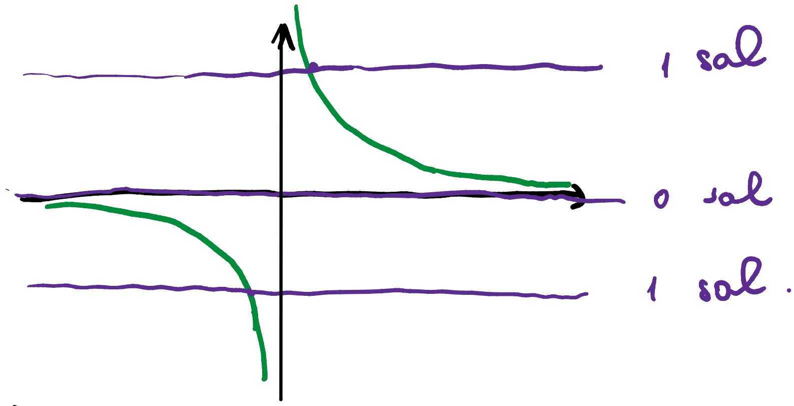
f non è iniettiva ma è suriettiva

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$



f è iniettiva ma non suriettiva

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\setminus\{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & \frac{1}{x} \end{array}$$



f è iniettiva ma non suriettiva

$$f(\mathbb{R}\setminus\{0\}) = \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

OSS $f(X)$ è l'insieme $y \in Y$ per cui tracciando una retta orizzontale ad altezza y si interseca il grafico.

Def: Siano $f: X \longrightarrow Y$ e $g: Z \longrightarrow W$ due funzioni. Se $f(X) \subseteq Z$, si definisce COMPOSIZIONE DI f e g (FUNZIONE COMPOSTA) la funzione

$$g \circ f: \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & W \\ x & \longmapsto & g(f(x)) \end{array}$$

ESEMPI

1) $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x+1$ $\qquad g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^2$

$$g \circ f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow g(f(x)) = f(x)^2 = (x+1)^2$$

2) $f(x) = x+1$, $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$g(x) = 2^x$ $\qquad g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}.$

$$g \circ f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto 2^{f(x)} = 2^{x+1}$$

3) $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longrightarrow x-1$ $\qquad g: [0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \sqrt{x}$

f è biettiva
$f(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \not\subseteq [0,+\infty).$

Per definire la composizione occorre restringere il dominio.

4) $f: [1,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longrightarrow x-1.$ $\qquad g: [0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longrightarrow \sqrt{x}$

In questo caso $f([1,+\infty)) = [0,+\infty)$ $(= \mathrm{Dom}(g))$
Si può definire $g \circ f$

$$g \circ f: [1,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \sqrt{x-1}$$

Attenzione : $g \circ f \neq f \circ g$

ESEMPIO

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x+1 \end{array} \qquad g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$

$$g \circ f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & g(f(x)) = (x+1)^2 \end{array} \qquad f \circ g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & f(g(x)) = f(x^2) \\ & & = x^2+1 \end{array}$$

Def: Sia $f: X \longrightarrow Y$ una funzione. Si dice che f è INVERTIBILE se $\exists\, g: Y \longrightarrow X$ tale che

$\forall x \in X: \quad g(f(x)) = x$ e

$\forall y \in Y: \quad f(g(y)) = y$

La funzione g si dice FUNZIONE INVERSA di f e si indica con f^{-1}.

TEOREMA

Sia $f: X \longrightarrow Y$ una funzione. Allora:

f è invertibile $\Longleftrightarrow$ f è biettiva

In tal caso: $f^{-1}: \begin{array}{ccl} Y & \longrightarrow & X \\ y & \longmapsto & \text{unica soluzione dell'eq. } f(x) = y. \end{array}$

ESEMPI

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x+1 \end{array}$$

Abbiamo visto che f è biettiva

$\forall y \in \mathbb{R}$, l'equazione $f(x) = y$ equivale a

$x+1 = y \quad \Longleftrightarrow \quad x = y-1$

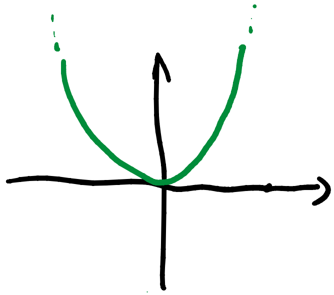
$$f^{-1}: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & y-1. \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{l} f(f^{-1}(y)) = f(y-1) = y-1+1 = y \\ f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(x+1) = x+1-1 = x \end{array} \right)$$

OSS: Iniettività/suriettività e invertibilità dipendono anche dalla scelta di dominio e codominio.

ESEMPIO

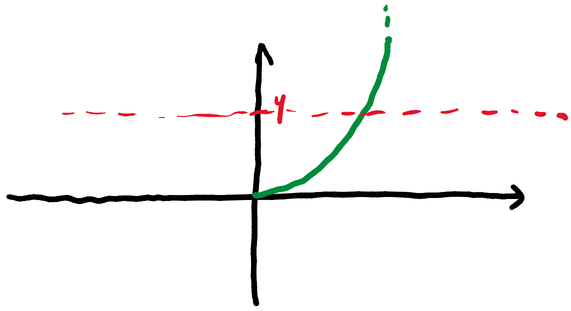
$$f: \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2 \end{array}$$ non è biettiva



Però:

$$f: \begin{array}{l} [0,+\infty) \longrightarrow \overbrace{[0,+\infty)}^{Y} \\ x \longmapsto x^2 \end{array}$$

è biettiva.



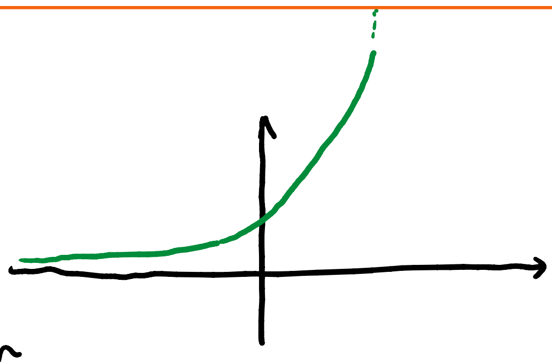
e la sua funzione inversa è la funzione radice quadrata

$$f^{-1}: \begin{array}{l} [0,+\infty) \longrightarrow [0,+\infty) \\ x \longmapsto \sqrt{x} \end{array}$$

$\forall y \in [0,+\infty)$: $x^2 = y \iff x = \pm\sqrt{y}$
se $x \in [0,+\infty)$ abbiamo solo $x = \sqrt{y}$.

ESEMPIO :

$$f: \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto e^x \end{array}$$



f è iniettiva ma non suriettiva. Per invertirla dobbiamo modificare il codominio:

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & (0,+\infty) \\ x & \longmapsto & e^x \end{array} \quad \text{è invertibile}$$

Se $y \in (0,+\infty)$, allora:

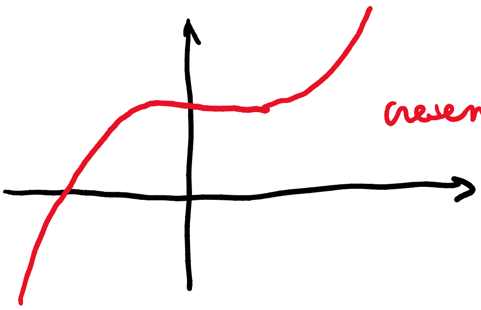
$$e^x = y \iff x = \ln y.$$

$$f^{-1}: \begin{array}{ccc} (0,+\infty) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln x \end{array}$$

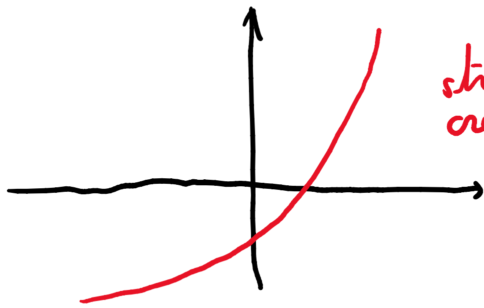
Def: Sia $f: X \longrightarrow Y$ con $X, Y \subseteq \mathbb{R}$. Allora:

1) Si dice che f è MONOTONA CRESCENTE IN X se $\forall x_1, x_2 \in X$: $\quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

2) Si dice che f è MONOTONA STRETTAMENTE CRESCENTE se $\forall x_1, x_2 \in X$ $\quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$



crescente



strett. crescente.

3) Si dice che f è MONOTONA DECRESCENTE se $\forall x_1, x_2 \in X$: $\quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

4) Si dice che f è MONOTONA STRETTAMENTE DECRESCENTE se $\forall x_1, x_2 \in X$: $\quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$