MATEMATICA - LEZIONE 8

lunedì 14 ottobre 2024 09:04

Esercizio dalla prima scheda di esercizi

$$4x^4 + 11x^2 = 3$$

$$4x^4 + 11x^2 - 3 = 0$$

$$y = x^2$$

$$4y^2 + 11y - 3 = 0$$

$$y_{1,2} = \frac{-11 \pm \sqrt{121 + 48}}{8} = \begin{cases} \frac{1}{4} \\ -3 \end{cases}$$

$$y = \frac{1}{4} \qquad y = -3$$

$$x^2 = \frac{1}{4} \quad \vee \quad x^2 = -3 \ (\text{imp.})$$

$$x = \pm \frac{1}{2}$$

Equazioni / disequazioni irrazionali (con radici)

- Se n è dispari:

$$\sqrt[n]{a(x)} = b(x) \iff a(x) = b(x)^n$$

$$\sqrt[n]{a(x)} \leq b(x) \iff a(x) \leq b(x)^n$$

$$\sqrt[n]{a(x)} \geq b(x) \iff a(x) \geq b(x)^n$$

$$\sqrt[n]{a(x)} > b(x) \iff a(x) > b(x)^n$$

$$\sqrt[n]{a(x)} < b(x) \iff a(x) < b(x)^n$$

- Se n è pari

$$\sqrt[n]{a(x)} = b(x) \iff \begin{cases} a(x) \geq 0 & \text{(condizione di esistenza)} \\ b(x) \geq 0 & \text{(cond. di compatibilità)} \\ a(x) = b^n(x) \end{cases}$$

$$\sqrt[n]{a(x)} \leq b(x) \iff \begin{cases} a(x) \geq 0 \\ b(x) \geq 0 \\ a(x) \leq b(x)^n \end{cases}$$

$$\sqrt[n]{a(x)} < b(x) \iff \begin{cases} a(x) \geq 0 \\ b(x) \geq 0 \\ a(x) < b(x)^n \end{cases}$$

$$\sqrt[n]{a(x)} \geq b(x) \iff \begin{cases} a(x) \geq 0 \\ b(x) \geq 0 \\ a(x) \geq b(x)^n \end{cases} \vee \begin{cases} a(x) \geq 0 \\ b(x) < 0 \end{cases}$$

$$\sqrt[n]{a(x)} \geq b(x) \iff \begin{cases} a(x) \geq 0 \\ b(x) \geq 0 \\ a(x) > b(x) \end{cases} \vee \begin{cases} a(x) \geq 0 \\ b(x) < 0. \end{cases}$$

Nota: quando $b(x)$ non dipende da x, alcune equazioni e disequazioni sono immediate:

- $\sqrt{2x-1} = -3$ impossibile.
- $\sqrt{2x-1} \geq -3 \iff x \geq \frac{1}{2}$

ESEMPIO

$$\sqrt{2x^2-3} = x$$

L'equazione è equivalente a:

$$\begin{cases} 2x^2-3 \geq 0 \\ x \geq 0 \\ 2x^2-3 = x^2 \end{cases} \rightarrow \quad x^2 = 3 \iff x = \pm\sqrt{3}$$

$$\begin{cases} 2x^2-3 \geq 0 \\ x \geq 0 \\ x = \sqrt{3} \vee \cancel{x = -\sqrt{3}} \end{cases}$$ non soddisfa la seconda diseq.

Unica soluzione : $x = \sqrt{3}$.

ESEMPIO 2

$\sqrt[3]{2x^2-x} = x$

$2x^2 - x = x^3$

$x^3 - 2x^2 + x = 0$

$x(x^2 - 2x + 1) = 0$

$x\,(x-1)^2 = 0$

$x = 0 \quad \vee \quad (x-1)^2 = 0$

$x = 0 \quad \vee \quad x - 1 = 0$

$x = 0 \quad \vee \quad x = 1$.

Nota

- $a^2 = 0 \Leftrightarrow a \cdot a = 0$
  $\Leftrightarrow a = 0 \vee a = 0$
  $\Leftrightarrow a = 0$.
- $a^n = 0 \Leftrightarrow a = 0$
  $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

Non sempre i metodi che abbiamo visto sono i più rapidi

$x + 3\sqrt{x} - 4 = 0$

$x + 3\,x^{\frac{1}{2}} - 4 = 0$

$y = \sqrt{x}$

$y^2 + 3y - 4 = 0$

$y = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \begin{cases} 1 \\ -4 \end{cases}$

$y = 1 \quad \vee \quad y = -4$

$\sqrt{x} = 1 \quad \vee \quad \sqrt{x} = -4$ (impossibile)

$\begin{cases} x \geq 0 \\ x = 1 \end{cases}$

$x = 1$

Metodo alternativo :

$x + 3\sqrt{x} - 4 = 0$

$3\sqrt{x} = 4 - x$

$$\begin{cases} x \ge 0 \\ 4-x \ge 0 \\ 9x = (4-x)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \ge 0 \\ x \le 4 \\ 9x = x^2 - 8x + 16 \end{cases} \longrightarrow x^2 - 17x + 16 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{17 \pm \sqrt{289-64}}{2} = \frac{17 \pm 15}{2} \begin{array}{l} 16 \\ 1 \end{array}$$

$$\begin{cases} x \ge 0 \\ x \le 4 \\ x = 1 \quad \vee \quad \cancel{x = 16} \end{cases}$$

$$x = 1$$

ESEMPIO 4

$$\sqrt{4-x^2} \le 2x - 1$$

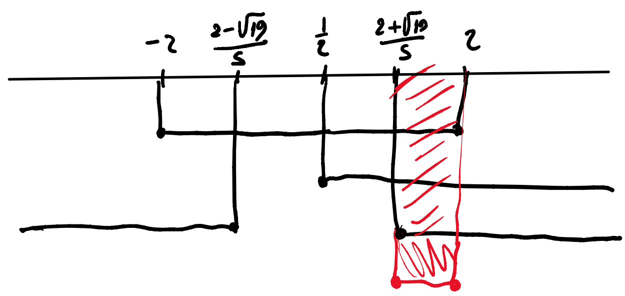
$$\begin{cases} 4 - x^2 \ge 0 \\ 2x - 1 \ge 0 \\ 4 - x^2 \le (2x-1)^2 \end{cases} \longrightarrow 4 - x^2 \le 4x^2 - 4x + 1$$

$$5x^2 - 4x - 3 \ge 0$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+15}}{5} = \frac{2 \pm \sqrt{19}}{5}$$

$$x \ge \frac{2+\sqrt{19}}{5} \quad \vee \quad x \le \frac{2-\sqrt{19}}{5}$$

$$\begin{cases} -2 \le x \le 2 \\ x \ge \frac{1}{2} \\ x \ge \frac{2+\sqrt{19}}{5} \quad \vee \quad x \le \frac{2-\sqrt{19}}{5} \end{cases}$$



$$\frac{2+\sqrt{19}}{5} \le x \le 2.$$

ESEMPIO

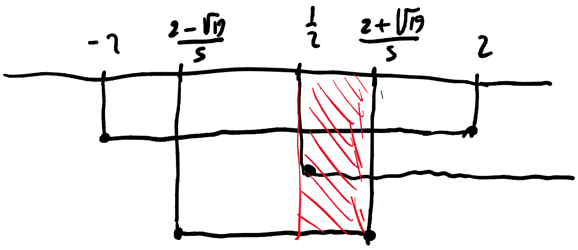
$$\sqrt{4-x^2} \ge 2x - 1$$

$$① \begin{cases} 4-x^2 \geq 0 \\ 2x-1 \geq 0 \\ 4-x^2 \geq (2x-1)^2 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} 4-x^2 \geq 0 \\ 2x-1 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ x \geq \frac{1}{2} \\ 4-x^2 \geq 4x^2-4x+1 \end{cases} \longrightarrow \quad 5x^2-4x-3 \leq 0$$

$$\frac{2-\sqrt{19}}{5} \leq x \leq \frac{2+\sqrt{19}}{5}$$

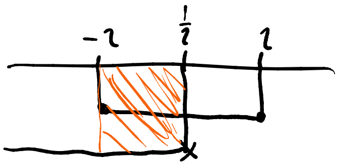
$$\begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ x \geq \frac{1}{2} \\ \frac{2-\sqrt{19}}{5} \leq x \leq \frac{2+\sqrt{19}}{5} \end{cases}$$



Soluzioni del primo sistema: $\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{2+\sqrt{19}}{5}$

Secondo sistema

$$\begin{cases} 4-x^2 \geq 0 \\ 2x-1 < 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

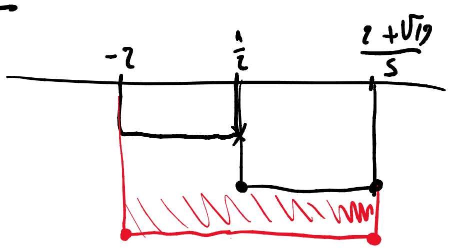


Soluzioni del secondo sistema: $-2 \leq x < \frac{1}{2}$

Soluzione finale:

$$-2 \leq x < \frac{1}{2} \quad \vee \quad \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{2+\sqrt{19}}{5}$$

$$-2 \leq x \leq \frac{2+\sqrt{19}}{5}$$



Esponenziali e logaritmi:

Siano $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ e sia $y \in \mathbb{R}$. Consideriamo l'equazione $a^x = y$.

- Caso banale:

  $a = 1$.

$1^x = y$.
$1 = y$.
Se $y \neq 1$ non ci sono soluzioni.
Se $y = 1$, ogni $x \in \mathbb{R}$ è soluzione.

- Secondo caso banale: $y \leq 0$.
  $a^x = y \quad \wedge \quad y \leq 0$.
  Non ci sono soluzioni.

TEOREMA. Siano $a \in \mathbb{R}, a>0, a \neq 1$ e $y \in \mathbb{R}$, $y>0$. Allora l'equazione $a^x = y$ ammette un'unica soluzione. Tale soluzione si dice LOGARITMO IN BASE a DI y e si indica con $\log_a y$

Ricordare:
- $\log_a y$ è definito solo se $y>0$ e $a>0$, $a \neq 1$.
- Consideriamo l'eq: $a^x = y$ con $a>0$, $a \neq 1$.
  Se $y \leq 0$: l'eq. non ha soluzioni.
  Se $y>0$: $a^x = y \iff x = \log_a y$.

($\log_a y$ è l'unico esponente da dare ad a per ottenere y)

ESEMPI

1) $\log_2 8 = 3$ perché $2^3 = 8$ $\quad (a^x = y \iff x = \log_a y)$

2) $\log_{10} 10000 = 4$ perché $10^4 = 10000$

3) $\log_4 \frac{1}{16} = -2$ perché $4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}$

4) $\log_5 5 = 1$ perché $5^1 = 5$

5) $\log_{17} 1 = 0$ perché $17^0 = 1$.

6) $\log_9 \sqrt{3} = \log_9 3^{\frac{1}{2}} = \log_9 \left(9^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = \log_9 9^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}$

Notazioni particolari:

- $a = 10$: $\log_{10}$ si indica anche con Log

  $\operatorname{Log} 100 = \log_{10} 100 = 2$

- $a = e$

  $\log$ si indica anche con $\ln$ o con $\log$

  $e = \sup\left\{ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\} = 2,71\ldots\ldots$

PROPRIETÀ DEI LOGARITMI

Sia $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 1$.

1) $\log_a 1 = 0$ e $\log_a a = 1$

2) $\forall x \in \mathbb{R}$: $\log_a a^x = x$

3) $\forall y \in \mathbb{R}, y > 0$: $a^{\log_a y} = y$.

4) $\forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}, y_1, y_2 > 0$:

   $\log_a (y_1 \cdot y_2) = \log_a y_1 + \log_a y_2$.

5) $\forall y \in \mathbb{R}, y > 0$: $\log_a \frac{1}{y} = -\log_a y$.

$$\boxed{\begin{array}{l} a^{\log_a y} = y \\ a^{-\log_a y} = \frac{1}{y} \end{array}}$$

6) $\forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}, y_1, y_2 > 0$:

   $\log_a \left(\frac{y_1}{y_2}\right) = \log_a y_1 - \log_a y_2$.

7) $\forall b \in \mathbb{R}, b > 0$ e $\forall y \in \mathbb{R}$:

   $\log_a b^y = y \log_a b$.

8) $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a, b \neq 1$:

   $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$

9) $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a, b \neq 1$ e $\forall y \in \mathbb{R}$:

   $\log_a y = \dfrac{\log_b y}{\log_b a}$

ESEMPIO

$$\log_3(81^{25}) = \frac{\log_{81} 81^{25}}{\log_{81} 3} = \frac{25}{\frac{1}{4}} = 25 \cdot 4 = 100.$$

oppure

$$\log_3(81^{25}) = 25 \log_3 81 = 25 \cdot 4 = 100.$$

ESEMPI

1) Risolvere $2 \cdot 3^x = 1$

$$3^x = \frac{1}{2}$$

$$x = \log_3 \frac{1}{2} = -\log_3 2$$

2) $e^x = 5 \iff x = \ln 5$

3) $e^{2x-1} = 1$

$$2x - 1 = \ln 1$$

$$2x - 1 = 0$$

$$x = \frac{1}{2}$$

4) $\log_2 x = -3$

$$x = 2^{-3}$$

$$x = \frac{1}{8}$$

- $a^x = y \iff \log_a a^x = \log_a y$
  $x = \log_a y$
- $\log_a x = y \overset{(\text{se } x>0)}{\Longleftarrow} a^{\log_a x} = a^y$
  $x = a^y$

5) $3e^{2x} - e^x = 2.$

$$3e^{2x} - e^x - 2 = 0$$

$$3(e^x)^2 - e^x - 2 = 0$$

Sostituzione: $e^x = y$.

$$3y^2 - y - 2 = 0$$

$$y = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{6} = \begin{cases} 1 \\ -\frac{2}{3} \end{cases}$$

$y = 1 \quad \vee \quad y = -\frac{2}{3}$

$e^x = 1 \quad \vee \quad e^x = -\frac{2}{3}$ (impossibile).

$x = \ln 1$

$x = 0$

PROPOSIZIONE (Metodi per risolvere le disequazioni)

Sia $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$. Siano $x, y \in \mathbb{R}$, $y > 0$.

Se $\boxed{a > 1}$, allora:

1) $a^x \leq y \iff x \leq \log_a y$ (si fa il $\log_a$ di entrambi i membri)

$a^x \geq y \iff x \geq \log_a y$

$a^x > y \iff x > \log_a y$

$a^x < y \iff x < \log_a y$

2) $\log_a y \leq x \iff y \leq a^x$ (si passa agli esponenziali in base a)

$\log_a y \geq x \iff y \geq a^x$

$\log_a y < x \iff y < a^x$

$\log_a y > x \iff y > a^x$

Se $0 < a < 1$ allora:

1) $a^x \leq y \iff x \geq \log_a y$

$a^x \geq y \iff x \leq \log_a y$

$a^x > y \iff x < \log_a y$

$a^x < y \iff x > \log_a y$

Le basi $0 < a < 1$ invertono tutte le disuguaglianze

2) $\log_a y \leq x \iff y \geq a^x$.

$\log_a y \geq x \iff y \leq a^x$

$\log_a y < x \iff y > a^x$

$\log_a y > x \iff y < a^x$

ESEMPI

1) $3^x > 2$

$x > \log_3 2$

2) $\ln x < 7$

c.e.: $x > 0$:

$\ln x < 7 \iff x < e^7$

Risultato: $\begin{cases} x > 0 \\ x < e^7 \end{cases} \iff 0 < x < e^7$

3) $\log_{\frac{1}{3}} x > 2$ c.e. $x > 0$.

$x < \left(\frac{1}{3}\right)^2$

$x < \frac{1}{9}$

Risultato: $\begin{cases} x > 0 \\ x < \frac{1}{9} \end{cases} \iff 0 < x < \frac{1}{9}$

4) $e^{2x-1} < e$

$2x - 1 < \ln e$

$2x - 1 < 1$

$2x < 2$

$x < 1$.

$a^x \leq a^y$ (se $a > 1$)

$\ln a^x \leq \ln a^y$

$x \leq y$