MATEMATICA - LEZIONE 7

venerdì 11 ottobre 2024 11:05

Sistemi di disequazioni (in una variabile)

$$\begin{cases} \text{disequazione } ① \\ \text{disequazione } ② \\ \vdots \end{cases}$$

Metodo:

- Si risolvono tutte le disequazioni
- Si intersecano gli insiemi delle soluzioni

ESEMPIO

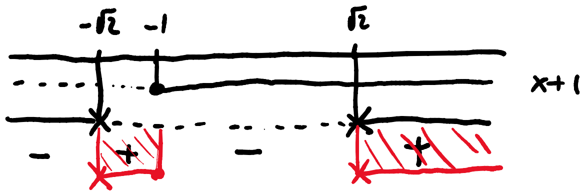
$$\begin{cases} 2x - 3 \leq 0 & ① \\ \dfrac{x+1}{x^2-2} \geq 0 & ② \end{cases}$$

① $2x - 3 \leq 0$

$x \leq \frac{3}{2}$

② $\dfrac{x+1}{x^2-2} \geq 0$

Studio del segno della frazione:

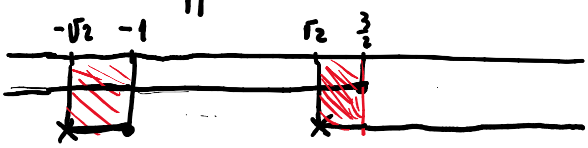


$-\sqrt{2} < x \leq -1 \quad \vee \quad x > \sqrt{2}$

Il sistema si riscrive come:

$$\begin{cases} x \leq \frac{3}{2} \\ -\sqrt{2} < x \leq -1 \quad \vee \quad x > \sqrt{2} \end{cases}$$

Si rappresentano le soluzioni

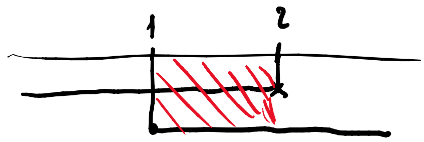


Per intersecare gli insiemi delle soluzioni si prendono le regioni comuni dei due insiemi.

Soluzioni del sistema: $-\sqrt{2} < x \leq -1 \quad \vee \quad \sqrt{2} < x \leq \frac{3}{2}$

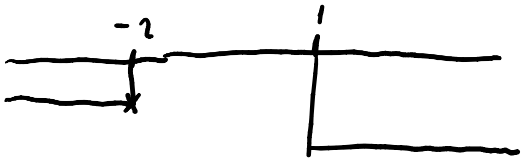
ESEMPIO 2

$$\begin{cases} x < 2 \\ x \geq 1 \end{cases} \iff 1 \leq x < 2$$



ESEMPIO 3

$$\begin{cases} x < -2 \\ x \geq 1 \end{cases}$$



Le due soluzioni non hanno punti in comune

Questo sistema non ha soluzioni

Sistemi misti (una equazione e una o più disequazioni)

$$\begin{cases} \text{equazione} \\ \text{disequazione} \quad ① \\ \text{disequazione} \quad ② \\ \vdots \end{cases}$$

Bisogna risolvere l'eq. e poi verificare se le soluzioni trovate risolvono anche la disequazione.

ESEMPIO

$$\begin{cases} x^2 + 4x - 5 = 0 \\ x^2 - 1 > 0 \end{cases}$$

$$x^2 + 4x - 5 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+5}}{1} = \begin{cases} 1 \\ -5 \end{cases}$$

Verifichiamo se le soluzioni risolvono la diseq.

✗ $x = 1$: $x^2 - 1 = 1 - 1 = 0$ non è vero che $0 > 0$

✓ $x = -5$: $x^2 - 1 = 25 - 1 = 24$ e $24 > 0$.

L'unica sol. del sistema è $x = -5$

Nota: si può anche risolvere la disequazione:

$$\begin{cases} x^2 + 4x - 5 = 0 \\ x^2 - 1 > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 \ \vee \ x = -5 \\ x > 1 \ \vee \ x < -1 \end{cases} \iff x = -5$$

Equazioni e disequazioni con valore assoluto

Tipo più semplice: $|a(x)| = b(x)$.

Per risolverle, ricordiamo la definizione di valore assoluto

$$|a(x)| = \begin{cases} a(x) & \text{se } a(x) \geq 0 \\ -a(x) & \text{se } a(x) < 0 \end{cases}$$

Ricordare:

L'equazione $|a(x)| = b(x)$ è equivalente a:

$$\begin{cases} a(x) \geq 0 \\ a(x) = b(x) \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} a(x) < 0 \\ -a(x) = b(x). \end{cases}$$

ESEMPIO

$$|6x - 1| = 10 - 9x$$

Equivalente a:

$$\begin{cases} 6x - 1 \geq 0 \\ 6x - 1 = 10 - 9x \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} 6x - 1 < 0 \\ -6x + 1 = 10 - 9x \end{cases}$$

$$15x = 11$$

$$x = \frac{11}{15}.$$

Risolve la diseq.?

$$6 \cdot \frac{11}{15} - 1 = \frac{22}{5} - 1 = \frac{17}{5} > 0$$

$x = \frac{11}{15}$ è sol. del sistema

$$3x = 9$$

$$x = 3$$

Verifico la diseq.

$$6 \cdot 3 - 1 = 17 \cancel{< 0}$$

$x = 3$ non risolve il sistema.

Conclusione:

Unica sol. dell'eq. è $x = \frac{11}{15}$

Lo stesso metodo si può usare per le disequazioni

$$|a(x)| \geq b(x)$$

Si può utilizzare la definizione: $|a(x)| = \begin{cases} a(x) & \text{se } a(x) \geq 0 \\ -a(x) & \text{se } a(x) < 0. \end{cases}$

Quindi la disequazione equivale a

$$\begin{cases} a(x) \geq 0 \\ a(x) \geq b(x) \end{cases} \vee \begin{cases} a(x) < 0 \\ -a(x) \geq b(x). \end{cases}$$

Riepilogo generale

- $|a(x)| \geq b(x) \iff \begin{cases} a(x) \geq 0 \\ a(x) \geq b(x) \end{cases} \vee \begin{cases} a(x) < 0 \\ -a(x) \geq b(x) \end{cases}$
- $|a(x)| > b(x) \iff \begin{cases} a(x) \geq 0 \\ a(x) > b(x) \end{cases} \vee \begin{cases} a(x) < 0 \\ -a(x) > b(x) \end{cases}$
- $|a(x)| \leq b(x) \iff \begin{cases} a(x) \geq 0 \\ a(x) \leq b(x) \end{cases} \vee \begin{cases} a(x) < 0 \\ -a(x) \leq b(x) \end{cases}$
- $|a(x)| < b(x) \iff \begin{cases} a(x) \geq 0 \\ a(x) < b(x) \end{cases} \vee \begin{cases} a(x) < 0 \\ -a(x) < b(x) \end{cases}$

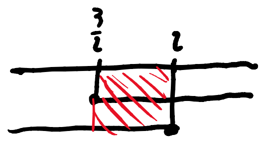
ESEMPIO

$$x - |2x - 3| \geq 1$$

$$\begin{cases} 2x - 3 \geq 0 \\ x - (2x - 3) \geq 1 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} 2x - 3 < 0 \\ x - (-2x + 3) \geq 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq \frac{3}{2} \\ -x + 3 \geq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq \frac{3}{2} \\ x \leq 2 \end{cases}$$

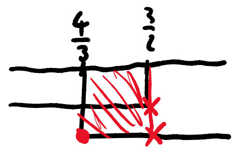


$$\frac{3}{2} \leq x \leq 2$$

$$\begin{cases} x < \frac{3}{2} \\ x + 2x - 3 \geq 1 \end{cases}$$

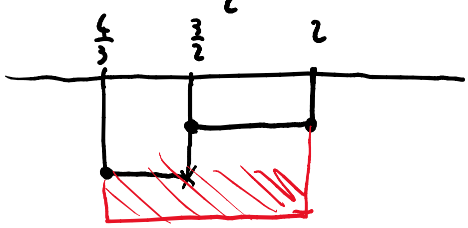
$$\begin{cases} x < \frac{3}{2} \\ 3x \geq 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < \frac{3}{2} \\ x \geq \frac{4}{3} \end{cases}$$



$$\frac{4}{3} \leq x < \frac{3}{2}$$

Soluzione: $\frac{3}{2} \leq x \leq 2 \quad \vee \quad \frac{4}{3} \leq x < \frac{3}{2}$



$$\frac{4}{3} \leq x \leq 2.$$

Unione delle soluzioni.

ESEMPIO 2

$$|x^2 - 4| \leq 2x + 1$$

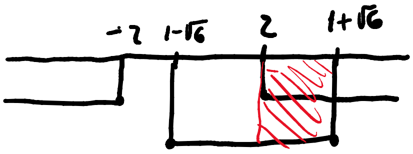
$$① \begin{cases} x^2 - 4 \geq 0 \\ x^2 - 4 \leq 2x + 1 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x^2 - 4 < 0 \\ -x^2 + 4 \leq 2x + 1. \end{cases} ②$$

① $\begin{cases} x \geq 2 \ \vee \ x \leq -2 \\ x^2 - 2x - 5 \leq 0 \end{cases}$

$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1+5} = 1 \pm \sqrt{6}$

$1 - \sqrt{6} \leq x \leq 1 + \sqrt{6}$

$\begin{cases} x \geq 2 \ \vee \ x \leq -2 \\ 1-\sqrt{6} \leq x \leq 1+\sqrt{6} \end{cases}$



Soluzioni di ①:

$2 \leq x \leq 1 + \sqrt{6}$

② $\begin{cases} x^2 - 4 < 0 \\ -x^2 + 4 \leq 2x + 1. \end{cases}$

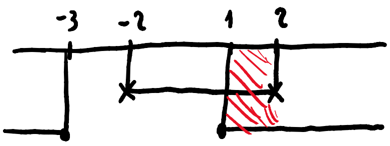
$\begin{cases} -2 < x < 2 \\ -x^2 - 2x + 3 \leq 0 \end{cases}$

$x^2 + 2x - 3 \geq 0$

$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1+3} = \begin{cases} 1 \\ -3 \end{cases}$

$x \leq -3 \ \vee \ x \geq 1.$

$\begin{cases} -2 < x < 2 \\ x \leq -3 \ \vee \ x \geq 1. \end{cases}$

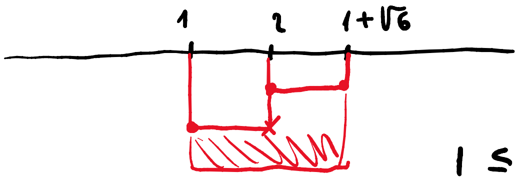


Soluzioni di ②:

$1 \leq x < 2.$

Conclusione: le soluzioni della disequazione sono:

$2 \leq x \leq 1 + \sqrt{6} \quad \vee \quad 1 \leq x < 2$



$1 \leq x \leq 1 + \sqrt{6}.$

Per le disequazioni si possono usare altri metodi:

OSS Dalle proprietà del valore assoluto si ricavano le seguenti equivalenze:

- $|a(x)| \le b(x) \iff -b(x) \le a(x) \le b(x) \iff \begin{cases} a(x) \le b(x) \\ a(x) \ge -b(x) \end{cases}$
- $|a(x)| < b(x) \iff -b(x) < a(x) < b(x) \iff \begin{cases} a(x) < b(x) \\ a(x) > -b(x) \end{cases}$
- $|a(x)| \ge b(x) \iff a(x) \ge b(x) \ \vee \ a(x) \le -b(x)$
- $|a(x)| > b(x) \iff a(x) > b(x) \ \vee \ a(x) < -b(x)$.

ESEMPIO: Risolviamo l'esercizio precedente con questi nuovi metodi.

$$|x^2 - 4| \le 2x + 1$$

$$-(2x+1) \le x^2 - 4 \le 2x + 1$$

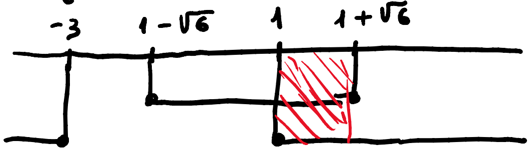
$$\begin{cases} x^2 - 4 \le 2x + 1 \\ x^2 - 4 \ge -2x - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 2x - 5 \le 0 \\ x^2 + 2x - 3 \ge 0 \end{cases}$$

$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{6}$

$x_{1,2} = -3, 1$

$$\begin{cases} 1 - \sqrt{6} \le x \le 1 + \sqrt{6} \\ x \le -3 \ \vee \ x \ge 1. \end{cases}$$



Soluzione: $1 \le x \le 1 + \sqrt{6}$.

Attenzione:

Il secondo metodo si applica solo per disequazioni del tipo

$|a(x)| \leq b(x) \;/\; |a(x)| < b(x) \;/\; |a(x)| \leq b(x) \;/\; |a(x)| \leq b(x)$

Non si usa per le equazioni:

$|a(x)| = b(x) \;\cancel{\Leftrightarrow}\; a(x) = b(x) \;\vee\; a(x) = -b(x)$

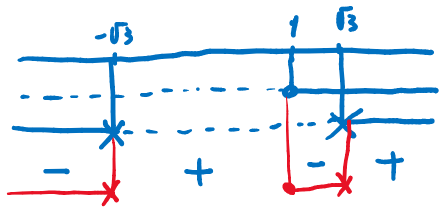
ESERCIZIO DI ESAME

$$\frac{|3x-2| - 1}{x^2-3} \leq 0$$

I metodo: definizione di valore assoluto:

$$① \begin{cases} 3x-2 \geq 0 \\ \dfrac{3x-2-1}{x^2-3} \leq 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} 3x-2 < 0 \\ \dfrac{-3x+2-1}{x^2-3} \leq 0 \end{cases} ②$$

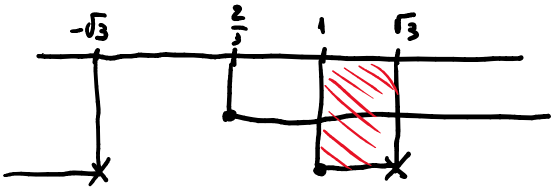
$$① \begin{cases} x \geq \frac{2}{3} \\ \dfrac{3x-3}{x^2-3} \leq 0 \end{cases} \longrightarrow \text{Si risolve con lo studio del segno}$$



$x < -\sqrt{3} \;\vee\; 1 \leq x < \sqrt{3}$

Il sistema ① si riscrive come:

$$\begin{cases} x \ge \frac{2}{3} \\ x < -\sqrt{3} \quad \vee \quad 1 \le x < \sqrt{3} \end{cases}$$



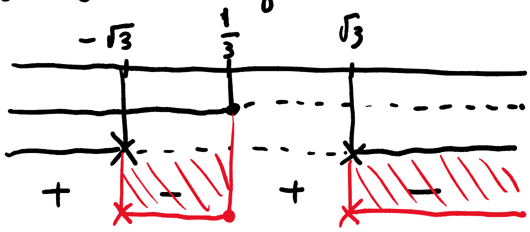
Soluzioni di 1:

$1 \le x < \sqrt{3}$

2 $\begin{cases} 3x - 2 < 0 \\ \dfrac{-3x+2-1}{x^2-3} \le 0 \end{cases}$ $\longrightarrow$ $x < \frac{2}{3}$

$$\frac{1-3x}{x^2-3} \le 0$$

Studio del segno:

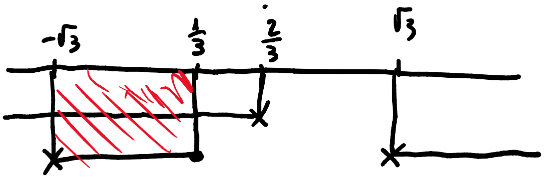


$-\sqrt{3} < x \le \frac{1}{3} \quad \vee \quad x > \sqrt{3}$

Il sistema 2 si riscrive come:

$$\begin{cases} x < \frac{2}{3} \\ -\sqrt{3} < x \le \frac{1}{3} \quad \vee \quad x > \sqrt{3} \end{cases}$$

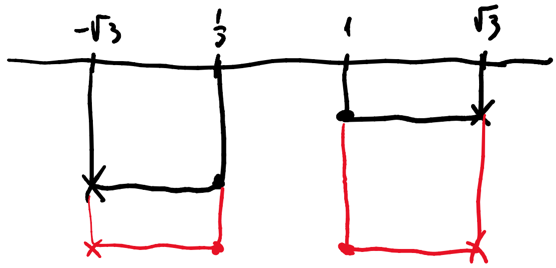
Intersezione:



Soluzioni di 2 : $-\sqrt{3} < x \le \frac{1}{3}$.

Conclusione: le soluzioni della diseq. sono:

$$-\sqrt{3} < x \le \frac{1}{3} \quad \vee \quad 1 \le x < \sqrt{3}$$



$-\sqrt{3} < x \leq \frac{1}{3} \quad \vee \quad 1 \leq x < \sqrt{3}.$

II metodo:

$$\frac{|3x-2|-1}{x^2-3} \leq 0$$

Facciamo direttamente lo studio del segno:

Numeratore:

$|3x-2|-1 \geq 0$

$|3x-2| \geq 1$

$3x-2 \geq 1 \quad \vee \quad 3x-2 \leq -1$

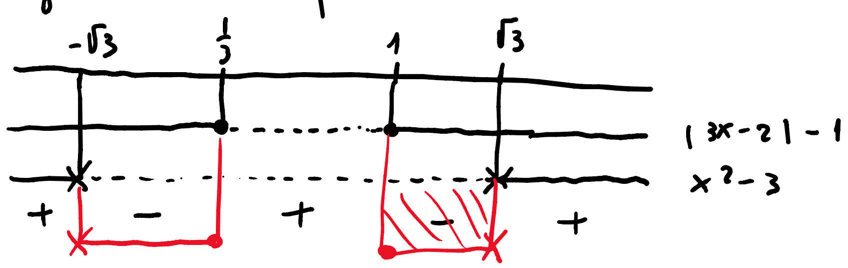
$3x \geq 3 \quad \vee \quad 3x \leq 1$

$x \geq 1 \quad \vee \quad x \leq \frac{1}{3}$

Denominatore:

$x^2-3>0 \iff x>\sqrt{3} \quad \vee \quad x<-\sqrt{3}$

Segno della frazione:



$-\sqrt{3} < x \leq \frac{1}{3} \quad \vee \quad 1 \leq x < \sqrt{3}.$

Equazioni e disequazioni irrazionali (cioè con radici)

Tipo più semplice:

$$\sqrt[n]{a(x)} = b(x)$$
$$\sqrt[n]{a(x)} \leq b(x)$$
$$\sqrt[n]{a(x)} \geq b(x)$$
$$\sqrt[n]{a(x)} < b(x)$$
$$\sqrt[n]{a(x)} > b(x)$$

Sono equazioni o disequazioni in cui l'incognita x compare sotto un simbolo di radice

Ricordare:

- Se n è dispari:

$$\sqrt[n]{a(x)} = b(x) \iff a(x) = b(x)^n$$
$$\sqrt[n]{a(x)} \leq b(x) \iff a(x) \leq b(x)^n$$
$$\sqrt[n]{a(x)} \geq b(x) \iff a(x) \geq b(x)^n$$
$$\sqrt[n]{a(x)} > b(x) \iff a(x) > b(x)^n$$
$$\sqrt[n]{a(x)} < b(x) \iff a(x) < b(x)^n$$

- Se n è pari

$$\sqrt[n]{a(x)} = b(x) \iff \begin{cases} a(x) \geq 0. \\ b(x) \geq 0 \\ a(x) = b^n(x) \end{cases}$$

$$\sqrt[n]{a(x)} \leq b(x) \iff \begin{cases} a(x) \geq 0 \\ b(x) \geq 0 \\ a(x) \leq b(x)^n \end{cases}$$

$$\sqrt[n]{a(x)} < b(x) \iff \begin{cases} a(x) \geq 0 \\ b(x) \geq 0 \\ a(x) < b(x)^n \end{cases}$$

$$\sqrt[n]{a(x)} \geq b(x) \iff \begin{cases} a(x) \geq 0 \\ b(x) \geq 0 \\ a(x) \geq b(x)^n \end{cases} \vee \begin{cases} a(x) \geq 0 \\ b(x) < 0 \end{cases}$$

$$\sqrt[n]{a(x)} \geq b(x) \iff \begin{cases} a(x) \geq 0 \\ b(x) \geq 0 \\ a(x) > b(x) \end{cases} \cup \begin{cases} a(x) \geq 0 \\ b(x) < 0. \end{cases}$$