MATEMATICA - LEZIONE 6

giovedì 10 ottobre 2024 14:01

Nella scorsa lezione:

- Come scomporre un polinomio con la regola di Ruffini
- Come risolvere equazioni/disequazioni dopo aver fattorizzato un polinomio

ESEMPIO

$$2x^3 + 9x^2 + 7x - 6 < 0$$

$$-16 + 36 - 14 - 6 = 0 \qquad \alpha = -2$$

$$
\begin{array}{r|rrr|r}
 & 2 & 9 & 7 & -6 \\
-2 & & -4 & -10 & 6 \\
\hline
 & 2 & 5 & -3 & 0
\end{array}
$$

Scomposizione del polinomio:

$$(x+2)(2x^2 + 5x - 3)$$

La disequazione si riscrive come:

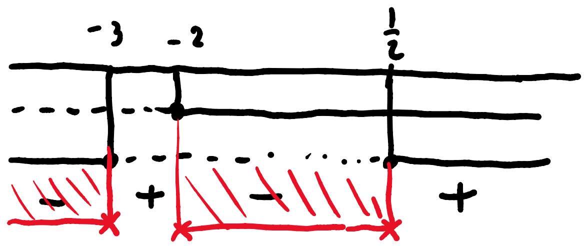
$$(x+2)(2x^2 + 5x - 3) < 0$$

$$x + 2 \geq 0 \iff x \geq -2$$

$$2x^2 + 5x - 3 \geq 0 \iff x \leq -3 \lor x \geq \frac{1}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25+24}}{4} = \begin{cases} \frac{1}{2} \\ -3 \end{cases}$$

Segno del prodotto:



Soluzioni:

$x < -3 \quad \vee \quad -2 < x < \frac{1}{2}$.

OSS Se $ax^2 + bx + c$ è un polinomio di 2° grado con $\Delta > 0$:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

dove x_1 e x_2 sono le due radici del polinomio

$$2x^2 + 5x - 3 = 2(x+3)\left(x - \tfrac{1}{2}\right)$$

OSS 2: Ogni polinomio $p(x)$ di grado ≥ 1 può essere scritto in un unico modo come prodotto del tipo

$$p(x) = a(x-x_1)^{\alpha_1}(x-x_2)^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot (x-x_n)^{\alpha_n} q_1^{\beta_1}(x) \cdot \ldots \cdot q_s^{\beta_s}(x)$$

(FATTORIZZAZIONE DI $p(x)$)

dove:

- a è il coeff. del monomio di grado max di p.
- $x_1, \ldots, x_n$ sono le radici distinte di p.
- $q_1, \ldots, q_s$ sono polinomi di grado 2 con $\Delta < 0$.
- $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_s, \beta_1, \ldots, \beta_s \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

- $2x^3 + 9x^2 + 7x - 6 = (x+2)(2x^2 + 5x - 3)$
  $= 2(x+2)(x+3)\left(x - \frac{1}{2}\right)$

- $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = (x+1)^3$

• $(x-1)(x^2-1) = (x-1)(x-1)(x+1) = (x-1)^2(x+1)$

Def: Se abbiamo la fattorizzazione di un polinomio

$$P(x) = a(x-x_1)^{\alpha_1}(x-x_2)^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot(x-x_n)^{\alpha_n}\, q_1^{\beta_1}(x)\cdot\ldots\cdot q_s^{\beta_s}(x)$$

gli esponenti $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ si dicono le MOLTEPLICITÀ delle radici $x_1, x_2, \ldots, x_n$

• $(x-1)^2(x+1) = 0$

1 è una radice di molteplicità 2

-1 è di molt. 1.

• $x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 1$

	1	1	−4	1	1
1		1	2	−2	−1
	1	2	−2	−1	0

	1	2	−2	−1
1		1	3	1
	1	3	1	0

$$x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 1 = (x-1)^2(\underbrace{x^2+3x+1}_{x_{1,2} = \frac{-3\pm\sqrt{9-4}}{2}})$$

$$= (x-1)^2\left(x - \frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right)$$

$x=1$ è una radice di molt. 2

$x = \frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$ sono radici di molt. 1.

Non sempre Ruffini è il metodo più rapido per fattorizzare un polinomio

ESEMPI

1) $$x^{10} - 4x^6 = x^6(x^4 - 4)$$
$$= x^6(x^2-2)(x^2+2)$$
$$= x^6(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x^2+2)$$

$x=0$ è una radice di molt 6

$x=\pm\sqrt{2}$ sono radici di molt. 1.

- $x^2-2 = x^2-(\sqrt{2})^2 = (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$

2) $$3x^4 - x^2 - 2$$

Sostituzione: $y = x^2$

$$3y^2 - y - 2 \qquad y_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{6} \begin{cases} 1 \\ -\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$3(y-1)\left(y+\frac{2}{3}\right)$$

$$3(x^2-1)\left(x^2+\frac{2}{3}\right)$$

$$3(x-1)(x+1)\left(x^2+\frac{2}{3}\right).$$

3) x^4+1 non ha radici.

$$x^4+1 = \underbrace{x^4+1+2x^2}_{(x^2+1)^2} - \underbrace{2x^2}_{(\sqrt{2}x)^2}$$

$$= (x^2+1)^2 - (\sqrt{2}x)^2$$

$$= (\underbrace{x^2+1-\sqrt{2}x}_{\Delta<0})(\underbrace{x^2+1+\sqrt{2}x}_{\Delta<0})$$

Equazioni / disequazioni razionali (fratte).

Sono equazioni / disequazioni in cui la x compare all'interno di uno o più rapporti tra polinomi.

Come si risolvono?

Per le equazioni:

1) condizioni di esistenza (denominatori $\neq 0$)
2) Trovare x
3) Verificare se i valori trovati soddisfano le cond. di esistenza.

ESEMPIO

$$\frac{x+1}{x^2-x} = \frac{2x}{x-1}$$

- C.e: $x^2-x \neq 0 \longrightarrow x(x-1)\neq 0 \iff x\neq 0 \wedge x \neq 1.$
  $x-1\neq 0 \longrightarrow x \neq 1$

Ci dobbiamo ricordare che $x\neq 0$, $x\neq 1$.

- $\dfrac{x+1}{x^2-x} = \dfrac{2x}{x-1}$

$$\frac{x+1}{x(x-1)} = \frac{2x}{x-1}$$

$$x+1 = \frac{2x}{\cancel{x-1}} \cdot x\cancel{(x-1)}$$

$$x+1 = 2x^2$$

$$2x^2 - x - 1 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \begin{cases} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\underbrace{x=1}_{\text{non soddisfa le c.e.}} \quad \vee \quad x = -\frac{1}{2}$$

- Ricordando le c.e.: $x \neq 0$ e $x \neq 1$ concludiamo che l'unica sol. è $x = -\frac{1}{2}$.

ESEMPIO

$$\frac{1}{6x^2-1} = 1$$

- c.e.: $6x^2-1 \neq 0$

$$x^2 \neq \frac{1}{6}$$

$$x \neq \pm \frac{1}{\sqrt{6}}$$

- $\dfrac{1}{6x^2-1} = 1$

$$1 = 6x^2-1$$

$$6x^2 = 2$$

$$1 = 6x^2-1$$

$$1+1 = 6x^2$$

$$2 = 6x^2$$

$$6x^2 = 2$$

$$3x^2 = 1$$

$$x^2 = \frac{1}{3}$$

$$x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Due soluzioni: $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ (entrambe verificano le c.e.)

ESEMPIO

$$\frac{x^4 - x^3 - 2x}{x^2 - x + 1} = 1 - x$$

- c.e.: $\underbrace{x^2 - x + 1}_{\Delta = 1-4=-3<0} \neq 0$ vero $\forall x \in \mathbb{R}$

($x^2 - x + 1 = 0$ non ha soluzioni
Quindi $x^2 - x + 1 \neq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$)

Non ci sono condizioni di esistenza

- $$\frac{x^4 - x^3 - 2x}{x^2 - x + 1} = 1 - x$$

$$\boxed{\frac{a}{b} = c \iff a = cb}$$

$$x^4 - x^3 - 2x = (1-x)(x^2 - x + 1)$$

$$x^4 - \cancel{x^3} - \cancel{2x} = x^2 - \cancel{x} + 1 - \cancel{x^3} + x^2 - \cancel{x}$$

$$x^4 = 2x^2 + 1$$

$$x^4 - 2x^2 - 1 = 0$$

$y = x^2$

$y^2 - 2y - 1 = 0$

$y_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$

$x^2 + 10x - 11 = 0$

$$\frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}}{a}$$

$y = 1+\sqrt{2} \quad \vee \quad y = 1-\sqrt{2}$

$x^2 = 1+\sqrt{2} \quad \vee \quad x^2 = \underbrace{1-\sqrt{2}}_{<0}$ (impossibile)

$x = \pm\sqrt{1+\sqrt{2}}$

Uniche soluzioni: $x = \pm\sqrt{1+\sqrt{2}}$.

Disequazioni razionali:

1) Condizioni di esistenza
2) Scrivere la disequazione nella forma:

$$\frac{p(x)}{q(x)} \geq 0 \;/\; \leq 0 \;/\; > 0 \;/\; < 0$$

3) Studio del segno (ricordando le c.e.)

Nota: Spesso si parte direttamente dal passo 3)

- Se la disequazione è inizialmente del tipo

$\frac{P(x)}{q(x)} \geq 0$ o $\frac{P(x)}{q(x)} \leq 0$ o $\frac{P(x)}{q(x)} > 0$ o $\frac{P(x)}{q(x)} < 0$

Le c.e. si possono fare insieme allo studio del segno.

- Più in generale se nel risolvere la disequazione non si modificano i denominatori, le c.e si possono fare insieme al punto 3.

ESEMPIO

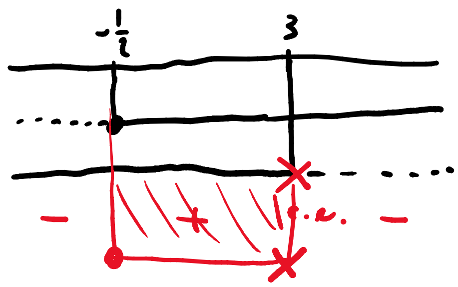
$$\frac{2x+1}{3-x} \geq 0 \qquad (c.e. \; x \neq 3)$$

Possiamo partire direttamente dallo studio del segno:

$2x+1 \geq 0 \iff x \geq -\frac{1}{2}$

$3-x > 0 \iff x < 3$

Soluzioni: $-\frac{1}{2} \leq x < 3$.



ESEMPIO

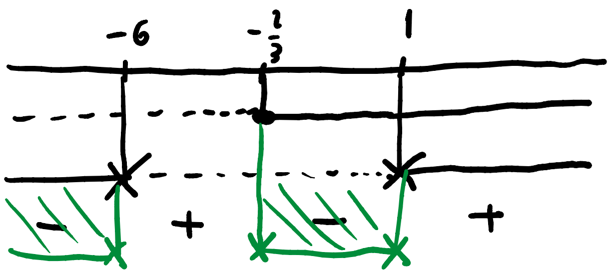
$$\frac{3x+2}{x^2+5x-6} < 0$$

Procediamo direttamente con lo studio del segno.

$3x+2 \geq 0 \iff x \geq -\frac{2}{3}$

$$x^2+5x-6>0 \iff x<-6 \ \vee\ x>1.$$

$$x_{1,2}=\frac{-5\pm\sqrt{25+24}}{2} \begin{cases} 1 \\ -6 \end{cases}$$



$$x<-6 \quad \vee \quad -\frac{2}{3}<x<1.$$

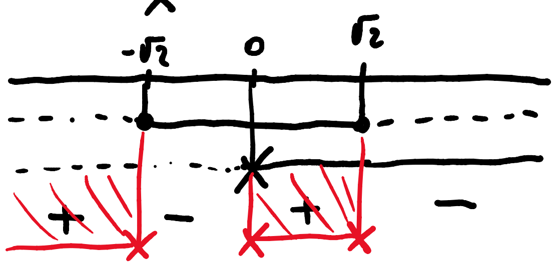
ESEMPIO

$$\frac{x+2}{x} > x+1.$$

- c.e. $x\neq 0$.
- $\dfrac{x+2}{x}-x-1>0$

$$\frac{\cancel{x}+2-x^2-\cancel{x}}{x}>0$$

$$\frac{2-x^2}{x}>0$$



$$x<-\sqrt{2} \quad \vee \quad 0<x<\sqrt{2}.$$