Equazioni / disequazioni con i polinomi

$$p(x)=0 \;/\; p(x)\geq 0 \;/\; p(x)\leq 0 \;/\; p(x)>0 \;/\; p(x)<0$$

dove $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$.

Def Se $a_n \neq 0$ n si dice GRADO del polinomio e si indica con $\deg p(x)$.

- Grado 1 (facile)
- Grado 2: L'esistenza di soluzioni dipende da Δ e, per le disequazioni, dal segno di a.
- Grado 3: Facile se il polinomio è scritto come prodotto di polinomi di grado 1 o 2.

ESEMPIO

$$(2x-1)(x^2+3x-10) < 0$$

Studiamo il segno del polinomio.

- Segno di $2x-1$:

  $2x-1 \geq 0 \iff x \geq \frac{1}{2}$

- Segno di $x^2+3x-10$:

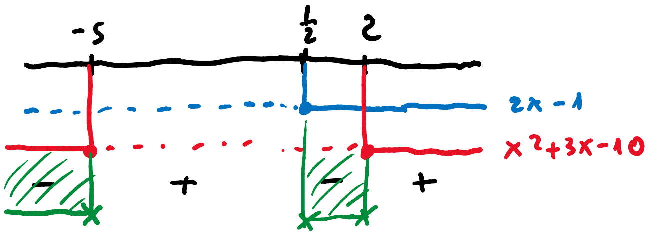
  $x^2+3x-10 \geq 0$

  $\Delta = 9+40 = 49$

  $x_{1,2} = \frac{-3\pm 7}{2}$ ⟨ 2, -5

  $x \leq -5 \;\vee\; x \geq 2$

Segno del polinomio



$x < -5 \;\vee\; \frac{1}{2} < x < 2$

Conclusione: le soluzioni della disequazione sono gli x t.c.

$x < -5 \quad \vee \quad \frac{1}{2} < x < 2$

ESEMPIO 2

$$x(x^2-2)(2x^2-5x-3) \geq 0$$

- $x \geq 0 \iff x \geq 0$
- $x^2 - 2 \geq 0 \iff x \leq -\sqrt{2} \quad \vee \; x \geq \sqrt{2}$

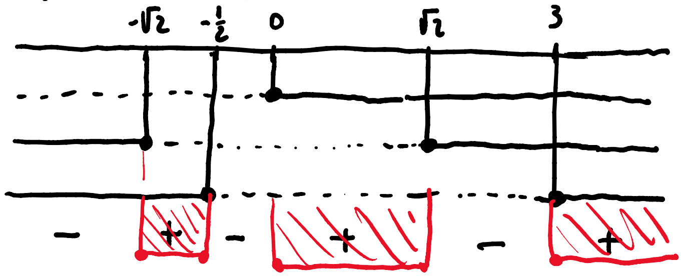
- $2x^2 - 5x - 3 \geq 0$

$\Delta = 25 + 24 = 49$

$x_{1,2} = \frac{5 \pm 7}{4} \begin{cases} 3 \\ -\frac{1}{2} \end{cases}$

$x \geq 3 \quad \vee \; x \leq -\frac{1}{2}$

Segno del prodotto:



Soluzioni: $-\sqrt{2} \leq x \leq -\frac{1}{2} \quad \vee \quad 0 \leq x \leq \sqrt{2} \quad \vee \quad x \geq 3.$

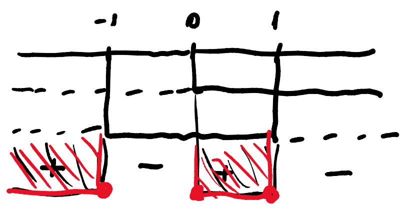
L'insieme delle soluzioni è:

$[-\sqrt{2}, -\frac{1}{2}] \cup [0, \sqrt{2}] \cup [3, +\infty[$

ESEMPIO 3

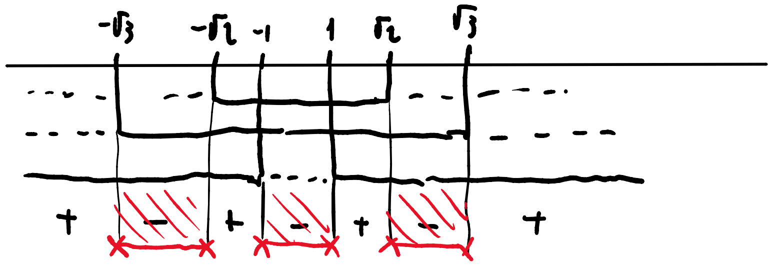
$$x(1-x^2) \geq 0$$

- $x \geq 0$
- $1 - x^2 \geq 0 \iff -1 \leq x \leq 1$



ESEMPIO 4

$$(2-x^2)(3-x^2)(x^2-1) < 0$$

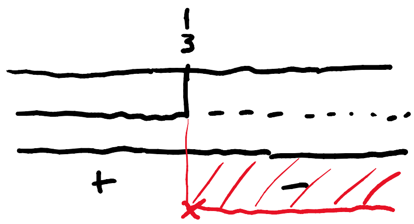


ESEMPIO 5

$$(1-3x)(x^2+x+20) < 0$$

- $1-3x \ge 0 \iff 1 \ge 3x \iff x \le \frac{1}{3}$
- $x^2+x+20 \ge 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

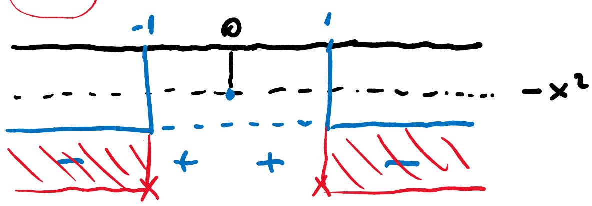
  $\Delta = 1-80 < 0$



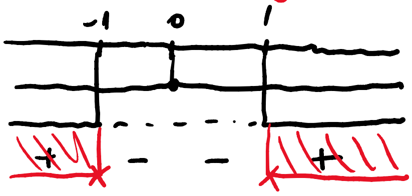
Soluzione $x > \frac{1}{3}$.

ESEMPIO 6

$$-x^2(x^2-1) < 0$$



$$x^2(x^2-1) > 0$$



TEOREMA (DI FATTORIZZAZIONE DEI POLINOMI)

Ogni polinomio a coefficienti reali di grado ≥ 3 può essere scritto come prodotto di polinomi di grado 1 oppure 2 (con $\Delta < 0$).

Come si fattorizza un polinomio? Ricordiamo prima come si fa la divisione tra polinomi:

Divisione tra polinomi (con resto).

Siano $a(x)$ e $b(x)$ due polinomi con $b(x)$ non nullo. Allora $\exists!$ $q(x)$ e $r(x)$ tali che

1) $a(x) = b(x) \cdot q(x) + r(x)$.
2) $r(x) = 0$ oppure $\deg(r(x)) < \deg(b(x))$.

ESEMPIO

$a(x) = x^5 + x^3 + x + 1 \qquad b(x) = x^3 + 2$

Come si fa la divisione tra $a(x)$ e $b(x)$?

$$
\begin{array}{cccccccc|c}
x^5 & + 0\cdot x^4 & + x^3 & + 0\cdot x^2 & + x & + 1 & & & x^3 + 2 \\
\cline{9-9}
x^5 & & & + 2x^2 & & & & & \underbrace{x^2 + 1}_{q(x)} \\
\cline{1-6}
\backslash\backslash & \backslash\backslash & x^3 & - 2x^2 & + x & + 1 & & & \\
 & & x^3 & & & + 2 & & & \\
\cline{3-6}
 & & \backslash\backslash & \multicolumn{3}{c}{\underbrace{-2x^2 + x - 1}_{r(x)}} & & & \\
\end{array}
$$

$x^2 \cdot (x^3 + 2)$
$= x^5 + 2x^2$

$q(x) = x^2 + 1$

$r(x) = -2x^2 + x - 1$

Verifichiamo che $a(x) = b(x)\,q(x) + r(x)$.

$$
\begin{aligned}
&(x^3 + 2)(x^2 + 1) - 2x^2 + x - 1 \\
&= x^5 + x^3 + \cancel{2x^2} + 2 - \cancel{2x^2} + x - 1 \\
&= x^5 + x^3 + x + 1
\end{aligned}
$$

C'è un caso in cui fare la divisione è più facile se $b(x) = x - \alpha$ con $\alpha \in \mathbb{R}$. Si può fare la divisione con la **REGOLA DI RUFFINI**

Idea: $a(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} \dots + a_1 x + a_0$

$b(x) = x - \alpha$

$$
\begin{array}{c|cccc|c}
 & a_n & a_{n-1} & \dots & a_1 & a_0 \\
\alpha & & & & & \\
\hline
 & & & & &
\end{array}
$$

Si parte impostando una tabella in cui nella prima riga inseriamo i coefficienti di $a(x)$. L'ultimo coeff. si isola dagli altri.

In basso a sinistra si scrive il valore di α

1) si abbassa a_n

$$
\begin{array}{c|cccc|c}
 & a_n & a_{n-1} & \dots & a_1 & a_0 \\
\alpha & \downarrow & & & & \\
\hline
 & a_n & & & &
\end{array}
$$

2) si moltiplica a_n per α e si scrive il risultato nella seconda colonna

$$
\begin{array}{c|cccc|c}
 & a_n & a_{n-1} & \dots & a_1 & a_0 \\
\alpha & \longrightarrow & \alpha a_n & & & \\
\hline
 & a_n & & & &
\end{array}
$$

3) si sommano i termini nella seconda colonna e si scrive il risultato in fondo alla colonna

$$\begin{array}{c|cccc|c} & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & a_0 \\ & & + & & & \\ \alpha & & \alpha a_n & & & \\ \hline & a_n & a_{n-1}+\alpha a_n & & & \end{array}$$

4) Si ripete il procedimento per tutte le colonne.

$$\begin{array}{c|cccc|c} & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & a_0 \\ \alpha & & \alpha a_n & * & & \\ \hline & a_n & a_{n-1}+\alpha a_n & & & \end{array}$$

Alla fine:

$$\begin{array}{c|cccc|c} & a_n & \cdots & \cdots & a_1 & a_0 \\ \alpha & & \cdots & \cdots & & \\ \hline & \multicolumn{4}{c|}{\underbrace{\beta_{n-1} \quad \beta_{n-2} \quad \cdots \quad \beta_0}_{\text{coefficienti di } q}} & \underbrace{r}_{\text{resto}} \end{array}$$

$q(x) = \beta_{n-1} x^{n-1} + \ldots + \beta_1 x + \beta_0$

$r(x) = r$.

ESEMPI

1) $a(x) = x^3 + x^2 - 1$ (Cioè: $x^3 + x^2 + 0 \cdot x - 1$)

$b(x) = x - 2$ $(\alpha = 2)$

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & & 2 & 6 & 12 \\ \hline & 1 & 3 & 6 & 11 \end{array}$$

$\longrightarrow$ (coefficienti di $a(x)$)

$q(x) = x^2 + 3x + 6$ $\qquad r(x) = 11$

Verifichiamo:

$$q(x)\cdot b(x) + r(x) = (x^2+3x+6)(x-2) \quad + 11$$
$$= x^3 + 3x^2 + \cancel{6x} - 2x^2 \cancel{-6x} - 12 + 11$$
$$= x^3 + x^2 - 1$$
$$= a(x).$$

ESEMPIO

$$a(x) = x^4 + 2x^3 - 3$$
$$b(x) = x - 1 \qquad \alpha = 1$$

$$\begin{array}{c|cccc|c}
 & 1 & 2 & 0 & 0 & -3 \\
1 & & 1 & 3 & 3 & 3 \\
\hline
 & 1 & 3 & 3 & 3 & 0
\end{array}$$

$$q(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 3$$
$$r(x) = 0$$

TEOREMA DEL RESTO

Sia $a(x)$ un polinomio e $\alpha \in \mathbb{R}$. Il resto della divisione di $a(x)$ per $x-\alpha$ è uguale a $a(\alpha)$
($a(\alpha)$ è il numero che si ottiene sostituendo il

Se $p(\alpha)=0$ il resto è 0 quindi $a(x) = (x-\alpha)\, q(x)$

Def: Sia $a(x)$ un polinomio. Un numero reale $\alpha \in \mathbb{R}$ si dice una RADICE di $a(x)$ se $a(\alpha)=0$.

TEOREMA DI RUFFINI

Sia $a(x)$ un polinomio e sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Allora α è una radice di $a(x)$ se e solo se $a(x)$ è divisibile per $x-\alpha$
($a(x) = (x-\alpha)\, q(x)$).

Queste regole si possono utilizzare per risolvere equazioni e disequazioni polinomiali. Se si conosce una soluzione α, si può dividere il polinomio per $x-\alpha$ e abbassarne il grado.

ESEMPIO

Risolviamo $x^3 + 4x - 5 = 0$

Ci accorgiamo che $x=1$ è una soluzione (cioè $x=1$ è una radice di $a(x) = x^3 + 4x - 5$)

Dividiamo $x^3 + 4x - 5$ per $x-1$ usando la regola di Ruffini:

$$
\begin{array}{c|ccc|c}
 & 1 & 0 & 4 & -5 \\
1 & & 1 & 1 & 5 \\
\hline
 & 1 & 1 & 5 & 0
\end{array}
$$

Quindi $x^3 + 4x - 5 = (x-1)(x^2 + x + 5)$

L'equazione di partenza è

$(x-1)(x^2 + x + 5) = 0$

$x - 1 = 0 \quad \vee \quad \underbrace{x^2 + x + 5}_{} = 0$

$x = 1 \qquad\qquad \Delta = 1 - 20 = -19 < 0$

$x = 1$ è l'unica soluzione.

ESEMPIO

$3x^3 - 13x^2 - 8x + 4 = 0$

$\frac{1}{3}$ è una soluzione:

$3 \cdot \frac{1}{27} - \frac{13}{9} - \frac{8}{3} + 4 = -\frac{4}{3} - \frac{8}{3} + 4 = 0$

Dividiamo il polinomio per $x - \frac{1}{3}$

$$
\begin{array}{c|ccc|c}
 & 3 & -13 & -8 & 4 \\
\frac{1}{3} & & 1 & -4 & -4 \\
\hline
 & 3 & -12 & -12 & 0
\end{array}
$$

$$\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(3x^2 - 12x - 12\right) = 0$$

$$3\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x^2 - 4x - 4\right) = 0$$

$$x - \frac{1}{3} = 0 \quad \vee \quad x^2 - 4x - 4 = 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = 4 + 4 = 8 \qquad x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{1}$$

$$x = \frac{1}{3} \qquad\qquad x = 2 \pm \sqrt{8}$$

Le soluzioni sono: $x = \frac{1}{3}$, $x = 2 + \sqrt{8}$, $x = 2 - \sqrt{8}$.

Domanda: Come abbiamo trovato la soluzione $\frac{1}{3}$?

Fatto utile: Consideriamo un polinomio del tipo $a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ con $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0 \in \mathbb{Z}$ e $a_n \neq 0$, $a_0 \neq 0$. Se $q \in \mathbb{Q}$ è una radice del polinomio, allora q si può scrivere come $q = \frac{k}{m}$ in cui k è un divisore di a_0 e m è un divisore di a_n

Nel esempio precedente: $3x^3 - 13x^2 - 3x + 4$

I divisori di 4 sono: ± 1, ± 2, ± 4

I divisori di 3 sono: ± 1, ± 3.

Quindi:

le possibili radici razionali sono $\pm 1, \pm \frac{1}{3}, \pm 2, \pm \frac{2}{3}, \pm 4, \pm \frac{4}{3}$

Nota: in questo modo si trovano solo le radici razionali. Tra questi numeri non troviamo infatti $2 \pm \sqrt{8}$ che sono irrazionali.

ESEMPIO

$$x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 1 = 0$$

Numeri da provare: ± 1.

1 è una soluzione: $1 + 1 - 4 + 1 + 1 = 0$

$$\begin{array}{c|cccc|c} & 1 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & & 1 & 2 & -2 & -1 \\ \hline & 1 & 2 & -2 & -1 & 0 \end{array}$$

$$(x-1)\,(\underline{x^3 + 2x^2 - 2x - 1}) = 0$$

$x=1$ è radice anche di questo polinomio

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & & 1 & 3 & 1 \\ \hline & 1 & 3 & 1 & 0 \end{array}$$

$$x^3 + 2x^2 - 2x - 1 = (x-1)(x^2 + 3x + 1)$$

$$x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 1 = (x-1)^2 (x^2 + 3x + 1)$$

Equazione

$$(x-1)^2 (x^2 + 3x + 1) = 0$$

$$x = 1 \quad \vee \quad x^2 + 3x + 1 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-4}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Soluzioni $x = 1$, $x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$.