

Notazioni elementari sulle MATRICI

Definizione Siano $m, n \in \mathbb{N}$ tali che $m, n \geq 1$

Una MATRICE $m \times n$ è una tabella di $m \cdot n$ numeri (reali) con m RIGHE e n COLONNE

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$$

a_{ij} denota l'elemento di posto (i, j) della matrice A (si usa anche la notazione a_{ij}^i), i denota l'indice di riga, j denota l'indice di colonna

Se $m=n$ (cioè se il numero di righe è uguale al numero di colonne) la matrice A si dice QUADRATA

L'insieme delle matrici $m \times n$ si denota $M_{m \times n}(\mathbb{R})$

Esempi

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{4} & 3 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \text{è una matrice } 2 \times 3$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{è una matrice quadrata } 2 \times 2$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 7 \\ -1 & 12 \end{pmatrix} \quad \text{è una matrice } 3 \times 2$$

Operazioni tra matrici: Addizione

Due matrici con lo stesso numero di righe e colonne si possono sommare componente per componente

Siano $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$, $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ allora

$$A+B := (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$$

Moltiplicazione per uno scalare reale

Possiamo moltiplicare una matrice per un numero reale, moltiplicando componente per componente gli elementi della matrice per lo scalare

Siano $\lambda \in \mathbb{R}$ e $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ allora $\lambda A := (\lambda a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$

Esempi

$$1) \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$$2) \quad 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Osservazione L'insieme delle matrici $m \times n$ munito delle precedenti operazioni di addizione e moltiplicazione per uno scalare è uno spazio vettoriale (di dimensione $m \cdot n$)

Prodotto tra matrici

Possiamo moltiplicare le matrici A e B se e soltanto se il numero di **colonne di A** è uguale al numero di **righe di B** , ovvero se ogni riga di A ha tanti elementi quanti quelli di ogni colonna di B . In tal caso la matrice $A \cdot B$ ha lo stesso numero di **righe di A** e lo stesso numero di **colonne di B** e l'elemento di posto (i, j) di $A \cdot B$ si ottiene facendo il prodotto scalare della i -esima riga di A per la j -esima colonna di B .

In simboli, se $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ matrice $m \times n$

$B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq p}}$ matrice $m \times p$

allora $A \cdot B = (c_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq p}}$ è una matrice $m \times p$ e

$$c_{ij} := \left(\begin{array}{cccc} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{array} \right) \cdot \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{mj} \end{pmatrix}$$

$\uparrow$
i-esima riga di A

$\rightarrow$ j-esima colonna di B

$$= \sum_{k=1}^m a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{im} b_{mj}$$

Osservazione Per le considerazioni precedenti il prodotto tra matrici è anche detto prodotto righe per colonne

Esempio Consideriamo la matrice quadrata 2×2

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, un vettore colonna $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ e un vettore riga $y^T = (y_1 \ y_2)$

A è una matrice 2×2 , x è una matrice 2×1

$\Rightarrow b = A \cdot x$ è una matrice 2×1

Se denotiamo $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ allora

$$b_1 = (a_{11} \ a_{12}) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = a_{11} x_1 + a_{12} x_2$$

$$b_2 = (a_{21} \ a_{22}) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = a_{21} x_1 + a_{22} x_2$$

y^T è una matrice 1×2 , $A \cdot x$ è una matrice 2×1

$\Rightarrow y^T \cdot A \cdot x$ è una matrice 1×1 , cioè è un numero reale

$$\begin{aligned} y^T \cdot A \cdot x &= y^T \cdot b = (y_1 \ y_2) \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = y_1 b_1 + y_2 b_2 \\ &= y_1 (a_{11} x_1 + a_{12} x_2) + y_2 (a_{21} x_1 + a_{22} x_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= a_{11} y_1 x_1 + a_{12} y_1 x_2 + a_{21} y_2 x_1 + a_{22} y_2 x_2 \\
&= \sum_{i,j=1}^2 a_{ij} y_i x_j
\end{aligned}$$

la funzione $b_A : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$(y, x) \mapsto (y_1 \ y_2) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \sum_{i,j=1}^2 a_{ij} y_i x_j$$

si chiama FORMA BILINEARE associata alla matrice A

Quando $x=y$ otteniamo la cosiddetta forma quadratiche associata ad A

Definizione (FORMA QUADRATICA associata ad una MATRICE QUADRATA)

Sia $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq m}}$ una matrice quadrata $m \times m$

Supponiamo che A sia una MATRICE SIMMETRICA, ovvero

$$\forall i, j \in \{1, \dots, m\} : a_{ij} = a_{ji}$$

Si chiama FORMA QUADRATICA associata ad A la funzione

$$q_A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R} \text{ tale che } \forall x \in \mathbb{R}^m : q_A(x) = x^T A x = \sum_{i,j=1}^m a_{ij} x_i x_j$$

Introduciamo la seguente classificazione per la matrice A , sulla base del segno della forma quadratiche q_A

- A si dice DEFINITA POSITIVA se $\forall x \in \mathbb{R}^m, x \neq 0 : q_A(x) > 0$
- A si dice DEFINITA NEGATIVA se $\forall x \in \mathbb{R}^m, x \neq 0 : q_A(x) < 0$
- A si dice SEMIDEFINITA POSITIVA se $\forall x \in \mathbb{R}^m : q_A(x) \geq 0$
- A si dice SEMIDEFINITA NEGATIVA se $\forall x \in \mathbb{R}^m : q_A(x) \leq 0$
- A si dice INDEFINITA se $\exists x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ tali che $q_A(x_1) > 0$ e $q_A(x_2) < 0$

Osservazione Ovviamente

A definita positiva $\Rightarrow A$ semidefinita positiva

A definita negativa $\Rightarrow A$ semidefinita negativa

A indefinita $\Leftrightarrow A$ non è semidefinita né positiva né negativa

Il problema di determinare la SEGNALE di una matrice quadrata simmetrica $A \in M_{m \times m}(\mathbb{R})$, ovvero stabilire se A sia definita/semidefinita positiva o negativa oppure indefinita, è un esercizio non banale.

In generale più è grande n e più sono lunghi i calcoli.

Per determinare la signature studieremo il segno degli autovalori di A (la cui definizione verrà introdotta in seguito)

Determinanti di una matrice quadrata

Matrici 2×2

$$\text{Sia } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$$

$\det(A) = ad - bc$ si chiama DETERMINANTE di A e si ottiene moltiplicando gli elementi della **diagonale principale** e sottraendo al risultato di questo prodotto il prodotto degli elementi della **diagonale secondaria**

$$\det \begin{pmatrix} \overset{+}{a} & \overset{-}{b} \\ \underset{-}{c} & \underset{+}{d} \end{pmatrix} = ad - bc$$

Matrici 3×3

$$\text{Sia } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$$

si chiama DETERMINANTE di A il numero reale

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

per calcolare tale determinante si utilizza la cosiddetta REGOLA di SARRUS

$$\begin{pmatrix} \overset{+}{a_{11}} & \overset{+}{a_{12}} & \overset{+}{a_{13}} & \overset{-}{a_{11}} & \overset{-}{a_{12}} & \overset{-}{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

↑
abbiamo ricopiato gli elementi
della matrice a destra

si moltiplicano gli elementi delle tre **diagonali principali** e delle tre **diagonali secondarie**, e si sommano questi sei prodotti prendendo con segno **+** quelli provenienti dalle diagonali principali e con segno **-** quelli provenienti dalle diagonali secondarie

Matrici $m \times m$

Sia $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq m}} \in M_{m \times m}(\mathbb{R})$

Fissati $i, j \in \{1, \dots, m\}$ si chiama **MINORE COMPLEMENTARE** di a_{ij} la sottomatrice di A ottenuta cancellando la i -esima riga e la j -esima colonna e la indichiamo con $M_{ij}(A)$

Fissato $i \in \{1, \dots, m\}$ si chiama **DETERMINANTE** di A

$$\det(A) = \sum_{j=1}^m (-1)^{i+j} a_{ij} \det(M_{ij}(A)) \quad \text{'regola di Laplace'}$$

Si può dimostrare che $\det(A)$ è indipendente dalla scelta di i e che fissato $j \in \{1, \dots, m\}$ vale anche

$$\det(A) = \sum_{i=1}^m (-1)^{i+j} a_{ij} \det(M_{ij}(A))$$

indipendentemente dalla scelta di j

Osservazione $\forall i, j \in \{1, \dots, m\} : M_{ij}(A) \in M_{m-1 \times m-1}(\mathbb{R})$, pertanto utilizzando ricorsivamente la relazione precedente possiamo calcolare il determinante di una matrice quadrata $m \times m$ (con $m \geq 4$) applicando diverse volte la regola di Sarrus oppure la formula per il determinante delle matrici 2×2

Esempi

$$1) \quad \det \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = (-1) \cdot 2 - 0 \cdot 1 = -2$$

$$2) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = 1 \cdot 2 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) \cdot 0 + 0 \cdot 3 \cdot 4 - 4 \cdot (-1) \cdot 1 - 0 \cdot 3 \cdot 0 - 0 \cdot 2 \cdot 0 = 4$$

$$3) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Applichiamo le regole di Laplace alla 3^a riga

$$\det(A) = \sum_{j=1}^4 (-1)^{3+j} a_{3j} \det(M_{3j}(A))$$

$$= a_{31} \det(M_{31}) - a_{32} \det(M_{32}) + a_{33} \det(M_{33}) - a_{34} \det(M_{34})$$

$$= 0 \cdot \det(M_{31}) - 0 \cdot \det(M_{32}) + (-1) \cdot \det(M_{33}) - 1 \cdot \det(M_{34})$$

$$= -\det(M_{33}) - \det(M_{34})$$

$$M_{33} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -2 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$M_{34} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(M_{33}) = -4 + 0 + 0 + 3 + 0 - 4 = -5$$

$$\det(M_{34}) = 0 + 0 + 0 + 1 + 0 + 2 = 3$$

$$\Rightarrow \det(A) = -\det(M_{33}) - \det(M_{34}) = -(-5) - 3 = 2$$

Definizione (Polinomio caratteristico di una matrice)

Sia $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ una matrice quadrata $n \times n$

Si chiama POLINOMIO CARATTERISTICO di A il polinomio (nelle variabili λ)

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$$

dove $I_n \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ è la matrice identità, cioè

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Matrici 2x2

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$$

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I_2) = \det \begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (a-\lambda)(d-\lambda) - bc = ad - (a+d)\lambda + \lambda^2 - bc \\ &= \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc = \lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A) \end{aligned}$$

dove $\text{tr}(A) = a+d$ è la somma degli elementi della diagonale principale

Matrici 3x3

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$$

$$P_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda)(a_{33} - \lambda) + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad - a_{13}(a_{22} - \lambda)a_{31} - (a_{11} - \lambda)a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}(a_{33} - \lambda) \\ &= -\lambda^3 + (a_{11} + a_{22} + a_{33})\lambda^2 - [a_{11}a_{22} + a_{11}a_{33} + a_{22}a_{33}]\lambda + a_{11}a_{22}a_{33} \\ &\quad + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \\ &\quad + (a_{13}a_{31} + a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21})\lambda \\ &= -\lambda^3 + (a_{11} + a_{22} + a_{33})\lambda^2 - (a_{11}a_{22} + a_{11}a_{33} + a_{22}a_{33} - a_{13}a_{31} - a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21})\lambda \\ &\quad + a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \\ &= -\lambda^3 + \text{tr}(A)\lambda^2 - \left(\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{pmatrix} \right) \lambda \\ &\quad + \det(A) \\ &= -\lambda^3 + \text{tr}(A)\lambda^2 - (\det(M_{33}) + \det(M_{11}) + \det(M_{22}))\lambda + \det(A) \end{aligned}$$

Osservazione Il polinomio caratteristico di $A \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ si calcola applicando caso per caso le regole di Sarrus (senza dover memorizzare la formula precedente)

Definizione Sia $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$. Le radici del polinomio caratteristico $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$ si chiamano AUTOVALORI di A

Esempi

1) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$p_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda(2-\lambda) - 1 = \lambda^2 - 2\lambda - 1$$

le radici di $p_A(\lambda)$ sono date da $\lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0$

$\Rightarrow \lambda_{1/2} = 1 \pm \sqrt{2}$ sono gli autovalori di A

2) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$p_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (2-\lambda)^3 + 1 + 1 - 3(2-\lambda) = (2-\lambda)^3 + 2 - 3(2-\lambda)$$

$$= 8 - 12\lambda + 6\lambda^2 - \lambda^3 + 2 - 6 + 3\lambda = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 9\lambda + 4$$

$$p_A(1) = -1 + 6 - 9 + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 \text{ è radice di } p_A(\lambda)$$

applichiamo la regola di Ruffini

	-1	6	-9	4
1		-1	5	-4
	-1	5	-4	0

$$p_A(\lambda) = (\lambda-1)(-\lambda^2 + 5\lambda - 4) = -(\lambda-1)(\lambda^2 - 5\lambda + 4)$$

$$= -(\lambda-1)(\lambda-1)(\lambda-4) = -(\lambda-1)^2(\lambda-4)$$

gli autovalori di A sono $\lambda=1$ e $\lambda=4$

Teorema di Sylvester (versione semplificata)

Sia $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ una matrice simmetrica

Allora il polinomio caratteristico $p_A(\lambda)$ ammette n -radici reali contate con le rispettive molteplicità

Teorema

Sia $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ una matrice simmetrica

- se tutti gli autovalori di A sono positivi allora A è definita positiva
- se tutti gli autovalori di A sono negativi allora A è definita negativa
- se tutti gli autovalori di A sono non negativi allora A è semidefinita positiva
- se tutti gli autovalori di A sono non positivi allora A è semidefinita negativa
- se esistono due autovalori di A di segno opposto allora A è indefinita

Esempi

1) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ gli autovalori sono $\lambda_{1/2} = 1 \pm \sqrt{2}$

pertanto A è indefinita poiché $1 - \sqrt{2} < 0 < 1 + \sqrt{2}$

2) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ gli autovalori sono $\lambda = 1$ (doppio) e $\lambda = 4$

quindi A è una matrice definita positiva