

Notazioni elementari di ALGEBRA LINEARE

Sia $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$

$\mathbb{R}^m := \{ (x_1, \dots, x_m) : x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R} \}$ SPAZIO EUCLIDEO m -DIMENSIONALE

Esempi

1) $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ RETTA REALE

2) $\mathbb{R}^2 = \{ (x_1, x_2) : x_1, x_2 \in \mathbb{R} \}$ PIANO EUCLIDEO

Nel piano euclideo ogni punto $\bar{x}$ è individuato univocamente da due coordinate cartesiane. Al posto di (x_1, x_2) si usa anche la notazione (x, y) .

3) $\mathbb{R}^3 = \{ (x_1, x_2, x_3) : x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \}$ SPAZIO EUCLIDEO TRIDIMENSIONALE

(spazio fisico). Nello spazio euclideo tridimensionale ogni punto $\bar{x}$ è individuato univocamente da tre coordinate cartesiane.

Al posto di (x_1, x_2, x_3) si usa anche la notazione (x, y, z)

Notazioni

Scriviamo $x \in \mathbb{R}^m$ per dire che x è una m -ple di numeri reali,

ovvero $x = (x_1, \dots, x_m)$ [$x_1, \dots, x_m$ si dicono COMPONENTI di x]

Nei libri di testo si possono trovare anche le ulteriori notazioni

$$\vec{x} = (x_1, \dots, x_m) \quad \text{oppure} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$$

$\downarrow$ leggiamo 'vettore x ' $\downarrow$ leggiamo 'vettore colonna x '

Operazioni in $\mathbb{R}^m$

Addizione

Siano $x = (x_1, \dots, x_m)$, $y = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$ allora

$$x + y := (x_1 + y_1, \dots, x_m + y_m) \in \mathbb{R}^m$$

Moltiplicazione per un numero reale (scalare)

Siano $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$, $\lambda \in \mathbb{R}$ (λ si dice 'scalare')

$$\lambda \cdot x := (\lambda x_1, \dots, \lambda x_m) \in \mathbb{R}^m$$

$\mathbb{R}^n$ munito delle operazioni di addizione e moltiplicazione per uno scalare è uno SPAZIO VETTORIALE, cioè soddisfa

$$(A_1) \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}^n : x + (y + z) = (x + y) + z$$

$$(A_2) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n : x + y = y + x$$

$$(A_3) \quad \exists 0 = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n \text{ tale che } \forall x \in \mathbb{R}^n : x + 0 = x = 0 + x$$

$$(A_4) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \exists -x \in \mathbb{R}^n \text{ tale che } x + (-x) = 0 = -x + x$$

$$(V_1) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x, y \in \mathbb{R}^n : \lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$$

$$(V_2) \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^n : (\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$$

$$(V_3) \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^n : (\lambda \mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x)$$

$$(V_4) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n : 1 \cdot x = x$$

Per tanto chiamiamo gli elementi di $\mathbb{R}^n$ VETTORI

Un particolare se $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ allora $-x = (-x_1, \dots, -x_n)$

Definizione Consideriamo i seguenti vettori di $\mathbb{R}^n$

$$e_1 := (1, 0, \dots, 0)$$

$$e_2 := (0, 1, \dots, 0)$$

$\vdots$

$$e_n := (0, 0, \dots, 1)$$

cioè e_j è la n -pla aventi tutte le componenti nulle tranne la j -esima che vale 1

$\{e_1, \dots, e_n\}$ si chiama **BASE CANONICA** di $\mathbb{R}^n$

Definizione Sia V un insieme non vuoto su cui sono definite due operazioni

$$+ : V \times V \rightarrow V \quad \text{'addizione'}$$

$$\cdot : \mathbb{R} \times V \rightarrow V \quad \text{'prodotto per uno scalare'}$$

talché le proprietà $(A_1), (A_2), (A_3), (A_4), (V_1), (V_2), (V_3), (V_4)$ siano verificate (sostituendo ogni volta $\mathbb{R}^n$ con V).

Allora V si chiama SPAZIO VETTORIALE

Da qui in avanti V denota sempre uno spazio vettoriale

Definizione Siano $v_1, \dots, v_k \in V$ e $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$
Il vettore $\sum_{j=1}^k \lambda_j v_j = \lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_k \cdot v_k$ si chiama
COMBINAZIONE LINEARE dei vettori $v_1, \dots, v_k$ mediante gli
scalari $\lambda_1, \dots, \lambda_k$.

Esempio Siano $v_1 = (2, 0)$, $v_2 = (-1, 4) \in \mathbb{R}^2$
allora $(-1) \cdot v_1 + 3 \cdot v_2 = (-2, 0) + (-3, 3) = (-5, 3)$
è una combinazione lineare dei vettori v_1, v_2

Definizione Siano $v_1, \dots, v_k \in V$. Diciamo che $v_1, \dots, v_k$
sono vettori LINEARMENTE INDIPENDENTI se

$$\forall \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R} : \sum_{j=1}^k \lambda_j v_j = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$$

Viceversa diciamo che $v_1, \dots, v_k$ sono LINEARMENTE DIPENDENTI
se la condizione precedente non è verificata, ovvero se esiste
una combinazione lineare di $v_1, \dots, v_k$ nulla con scalari non
tutti simultaneamente nulli.

Definizione Siano $v_1, \dots, v_k \in V$. Diciamo che $\{v_1, \dots, v_k\}$ è
un SISTEMA di GENERATORI di V se

$$\forall v \in V \exists \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R} \text{ tali che } v = \sum_{j=1}^k \lambda_j v_j$$

ovvero se ogni vettore di V si può scrivere come combinazione
lineare dei vettori $v_1, \dots, v_k$

Teorema Sia V uno spazio vettoriale e $n \in \mathbb{N}$.

Sono equivalenti le seguenti condizioni

- 1) $\forall v_1, \dots, v_k \in V : v_1, \dots, v_k$ linearmente indipendenti $\Rightarrow k \leq n$
- 2) $\forall v_1, \dots, v_k \in V : \{v_1, \dots, v_k\}$ è un sistema di generatori di $V \Rightarrow k \geq n$

Inoltre il numero naturale n è univocamente determinato e
si chiama DIMENSIONE di V e si denota $\dim V$.

Insieme se $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ è un sistema di generatori linearmente
indipendenti di V allora B si dice BASE di V

Osservazione Sia $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ allora

$$x = \sum_{j=1}^n x_j e_j = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$$

cioè x si scrive come combinazione lineare di $e_1, \dots, e_n$

Inoltre si prova che $e_1, \dots, e_n$ sono linearmente indipendenti

Dunque $\{e_1, \dots, e_n\}$ è una base dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$

nel senso del teorema precedente, ovvero $\dim \mathbb{R}^n = n$

Notazioni In $\mathbb{R}^3$ (spazio fisico) invece di e_1, e_2, e_3 , i vettori della base canonica si denotano

$$\vec{i} := (1, 0, 0), \quad \vec{j} := (0, 1, 0), \quad \vec{k} := (0, 0, 1)$$

In particolare $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y, z) = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$

Osservazione $\mathbb{R}$ è ovviamente uno spazio vettoriale munito delle solite operazioni di somma e prodotto, $\{1\}$ è una base dunque $\mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale 1-dimensionale

Osservazione $\mathbb{C}$ è uno spazio vettoriale munito delle usuali operazioni di somma e prodotto per un numero reale.

$$\begin{aligned} \text{Inoltre, poiché } \forall z \in \mathbb{C} : z &= \operatorname{Re}(z) + i \operatorname{Im}(z) \\ &= \operatorname{Re}(z) \cdot 1 + \operatorname{Im}(z) \cdot i \end{aligned}$$

segue che $\{1, i\}$ è una base di tale spazio, che è quindi bidimensionale.

Osservazione L'insieme delle soluzioni di una equazione differenziale lineare omogenea è uno spazio vettoriale di dimensione pari all'ordine dell'equazione.

Ad esempio la generale soluzione di $y'' + y = 0$ è

dato da $y_0(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, ovvero

è una combinazione lineare delle funzioni $\cos x$ e $\sin x$,

ovvero $\{\cos x, \sin x\}$ è una base dello spazio delle soluzioni

Prodotto scalare

Siano $x = (x_1, \dots, x_m)$, $y = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$

$$x \cdot y = \sum_{j=1}^m x_j y_j = x_1 y_1 + \dots + x_m y_m \in \mathbb{R} \quad \text{'prodotto scalare tra } x \text{ e } y \text{'}$$

Osservazioni

- 1) Il prodotto scalare è un numero reale
- 2) Il prodotto scalare $x \cdot y$ si denota anche (x, y) , $\langle x, y \rangle$

Il prodotto scalare verifica le seguenti proprietà:

- $(B_1) \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}^m : (x+y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$
- $(B_2) \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}^m : x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$
- $(B_3) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x, y \in \mathbb{R}^m : (\lambda x) \cdot y = \lambda(x \cdot y) = x \cdot (\lambda y)$
- $(Q_1) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^m : x \cdot y = y \cdot x$
- $(Q_2) \quad \forall x \in \mathbb{R}^m : x \cdot x \geq 0$
- $(Q_3) \quad \forall x \in \mathbb{R}^m : x \cdot x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Queste proprietà ci dicono che • individua una FORMA QUADRATICA DEFINITA POSITIVA (introduciamo nel seguito le nozioni di forma quadratica), pertanto $\mathbb{R}^m$ munito del prodotto scalare • è uno SPAZIO VETTORIALE EUCLIDEO

Norma / Modulo

Sia $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$

$$\|x\| := \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{\sum_{j=1}^m x_j^2}$$

si chiama NORMA (o MODULO) del vettore x e rappresenta la lunghezza del vettore x .

La norma verifica le seguenti proprietà:

- $(N_1) \quad \forall x \in \mathbb{R}^m : \|x\| \geq 0$
- $(N_2) \quad \forall x \in \mathbb{R}^m : \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $(N_3) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^m : \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$

$$(N_4) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n: \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

$$(N_5) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n: |x \cdot y| \leq \|x\| \|y\|$$

Definizioni

1) $x, y \in \mathbb{R}^n$ si dicono ORTOGONALI (o perpendicolari) se $x \cdot y = 0$

2) $u \in \mathbb{R}^n$ si dice VERSORE se $\|u\| = 1$

Osservazione I vettori della base canonica sono versori e due a due ortogonali, pertanto $\{e_1, \dots, e_n\}$ si dice BASE ORTONORMALE di $\mathbb{R}^n$