

Teorema (CRITERIO del CONFRONTO)

Siano $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ successioni di numeri reali tali che

$$0 \leq a_n \leq b_n \text{ definitivamente}$$

- 1) se $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ è convergente allora $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ è convergente
- 2) se $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ diverge positivamente allora $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ diverge positivamente

Esempio fondamentale $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ **serie armonica generalizzata**

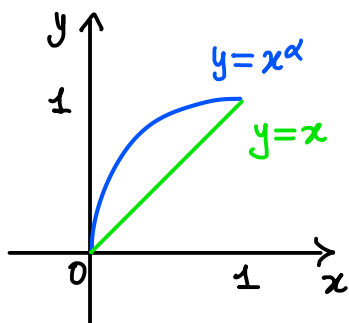
Se $\alpha < 1$ allora $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ è divergente positivamente

I caso: se $\alpha \leq 0$ allora $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \begin{cases} 1 & \text{se } \alpha = 0 \\ +\infty & \text{se } \alpha < 0 \end{cases}$

e quindi, essendo violata la condizione necessaria per la convergenza, tale serie è divergente positivamente in quanto serie a termini positivi.

II caso: se $\alpha \in (0, 1)$ utilizziamo la seguente disuguaglianza

$$\forall x \in [0, 1]: 0 < x \leq x^\alpha$$



$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1: x = \frac{1}{n} \in [0, 1] \Rightarrow 0 < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^\alpha}$$

perché $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$, per il criterio del

confronto abbiamo che $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} = +\infty$ per $\alpha \in (0, 1)$

Esempio fondamentale Se $\alpha > 1$ allora $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ è convergente

Osserviamo che $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2: \frac{1}{n^\alpha} \leq \int_{n-1}^n \frac{1}{x^\alpha} dx$

$$\begin{aligned} \text{Pertanto } \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^\alpha} &= 1 + \sum_{n=2}^N \frac{1}{n^\alpha} \leq 1 + \sum_{n=2}^N \int_{n-1}^n \frac{1}{x^\alpha} dx \\ &= 1 + \int_1^N \frac{1}{x^\alpha} dx = 1 + \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right]_1^N \\ &= 1 + \frac{1}{\alpha-1} (1 - N^{1-\alpha}) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{\alpha-1} \end{aligned}$$

La successione delle somme parziali $\left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^\alpha} \right)_{N \geq 1}$ si controlla dall'alto con la successione convergente $\left(1 + \frac{1}{\alpha-1} (1 - N^{1-\alpha}) \right)_{N \geq 1}$. Perchè le successioni convergenti sono limitate e per la disuguaglianza precedente, abbiamo che

la successione $\left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^\alpha}\right)_{N \geq 1}$ è limitata. la successione delle somme parziali è inoltre crescente (essendo il termine generale positivo), quindi essendo crescente e limitata è convergente

Riassumendo :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \begin{cases} \text{convergente} & \text{per } \alpha > 1 \\ +\infty & \text{per } \alpha \leq 1 \end{cases}$$

Il carattere della serie armonica generalizzata è importantissimo perché ci permette di ottenere il seguente criterio.

Teorema (CRITERIO degli INFINITESIMI)

Sia $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di numeri reali definitivamente positivi. Supponiamo che $\exists p \in (0, +\infty)$ tale che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^p a_n =: l \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\}.$$

1) Se $l \in (0, +\infty)$, cioè $a_n = \frac{l}{n^p} + o\left(\frac{1}{n^p}\right)$ per $n \rightarrow +\infty$, allora $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ hanno lo stesso carattere ovvero

i) $p > 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ è convergente

ii) $p \in [0, 1] \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ è divergente positivamente

2) se $l = 0$ e $p > 1$ allora $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ è convergente

3) se $l = +\infty$ e $p \in [0, 1]$ allora $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ è divergente positivamente

Esempi 1) $\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ serie a termini positivi, poiché la funzione seno è positiva nell'intervallo $(0, 1]$.

Sappiamo che $\sin x = x + o(x)$ per $x \rightarrow 0$, poiché $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ abbiamo

$$\sin\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \text{ per } n \rightarrow +\infty$$

Possiamo applicare il criterio degli infinitesimi per $p=1$ e

quindi la serie diverge positivamente.

2) $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$ serie a termini positivi, poiché $\ln$ è positiva in $(1, +\infty)$. Dello sviluppo di Taylor

$$\ln(1+x) = x + o(x) \text{ per } x \rightarrow 0 \Rightarrow \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \text{ per } n \rightarrow +\infty$$

dal criterio degli infinitesimi ($p=2$) otteniamo che la serie considerata è convergente

3) $\sum_{n=1}^{+\infty} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ serie a termini positivi essendo la funzione arcotangente positiva in $(0, \infty)$

$$\left. \begin{array}{l} \arctan x = x + o(x) \text{ per } x \rightarrow 0 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \text{ per } n \rightarrow +\infty$$

Applicando il criterio degli infinitesimi per $p=\frac{1}{2}$ otteniamo che la serie considerata è divergente positivamente

Definizione (ASSOLUTA CONVERGENZA) Sia $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di numeri reali. Diciamo che $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ è ASSOLUTAMENTE CONVERGENTE se $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$ è convergente.

Teorema Sia $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di numeri reali.

Se $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ è assolutamente convergente allora $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ è convergente e inoltre vale la disuguaglianza $\left| \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$

Esempio $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(n)}{n^2+1}$ serie di termini generali a segno variabile

Possiamo studiare l'assoluta convergenza:

$$\left| \frac{\sin(n)}{n^2+1} \right| = \frac{|\sin(n)|}{n^2+1} \leq \frac{1}{n^2+1} = \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Per il criterio degli infinitesimi ($p=2$) e per il criterio del confronto la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \left| \frac{\sin(n)}{n^2+1} \right|$ è convergente, cioè la serie di partenza $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(n)}{n^2+1}$ è assolutamente convergente e quindi è anche convergente.

Teorema (CRITERIO di LEIBNIZ)

Sia $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di numeri reali tale che

1) $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq 0$

2) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è decrescente, cioè $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} \leq a_n$

3) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è infinitesima, cioè $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$

Allora la serie a segno alternato $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n$ è convergente.

Inoltre, denotati con $S_N = \sum_{n=0}^N (-1)^n a_n$ la somma parziale N-esima

$S = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n$ la somma della serie

allora $\forall n \in \mathbb{N} : |S - S_n| \leq a_{n+1}$

Esempio fondamentale la serie armonica generalizzata a segno

alternato $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^\alpha}$ converge per $\alpha > 0$ (criterio di Leibniz) e

converge assolutamente per $\alpha > 1$ (serie armonica generalizzata)

Esercitazione (parte II) sulle EDO lineari del 2° ordine

1) $y'' - 3y' = x^2 + 1$

$y'' - 3y' = 0$ equazione omogenea

$p(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda = \lambda(\lambda - 3) \Rightarrow \lambda = 0, 3$ sono le radici caratteristiche

$y_0(x) = C_1 + C_2 e^{3x} \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

Determiniamo una soluzione particolare dell'equazione completa

con il metodo di similitudine, cerchiamo una soluzione del tipo

$\bar{y}(x) = x(Ax^2 + Bx + C) = Ax^3 + Bx^2 + Cx \quad [\lambda = 0 \text{ è radice semplice di } p(\lambda)]$

$\bar{y}'(x) = 3Ax^2 + 2Bx + C$

$\bar{y}''(x) = 6Ax + 2B$

$\bar{y}$ è soluzione di $y'' - 3y' = x^2 + 1 \Leftrightarrow 6Ax + 2B - 3(3Ax^2 + 2Bx + C) = x^2 + 1$

$\Leftrightarrow -9Ax^2 + 6(A-B)x + 2B - 3C = x^2 + 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -9A = 1 \\ 6(A-B) = 0 \\ 2B - 3C = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -\frac{1}{9} \\ B = A = -\frac{1}{9} \\ C = \frac{2B-1}{3} = -\frac{11}{27} \end{cases}$$

$\bar{y}(x) = x \left(-\frac{x^2}{9} - \frac{x}{9} - \frac{11}{27} \right) = -\frac{x}{9} \left(x^2 + x + \frac{11}{3} \right)$

$y(x) = y_0(x) + \bar{y}(x) = C_1 + C_2 e^{3x} - \frac{x}{9} \left(x^2 + x + \frac{11}{3} \right)$

è soluzione generale dell'equazione completa

$$2) \quad y'' + 2y' + 10y = xe^{-x}$$

$y'' + 2y' + 10y = 0$ equazione omogenea associata

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 10$$

$$\Delta = 4 - 40 = -36 = -3^2$$

$$\lambda_{1/2} = -1 \pm 3i \quad \text{radici complesse e coniugate}$$

$$y_0(x) = C_1 \cos(3x) e^{-x} + C_2 \sin(3x) e^{-x}$$

$$= (C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x)) e^{-x} \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

applichiamo il metodo di similitudine

$$\bar{y}(x) = (Ax+B)e^{-x} \quad [\lambda = -1 \text{ non \u00e9 radice di } p(\lambda)]$$

$$\bar{y}'(x) = Ae^{-x} - (Ax+B)e^{-x} = (-Ax + A-B)e^{-x}$$

$$\bar{y}''(x) = -Ae^{-x} + (-Ax + A-B)(-e^{-x}) = (Ax - 2A + B)e^{-x}$$

$\bar{y}$ \u00e9 soluzione di $y'' + 2y' + 10y = xe^{-x}$

$$\Leftrightarrow (Ax - 2A + B)e^{-x} + 2(-Ax + A - B)e^{-x} + 10(Ax + B)e^{-x} = xe^{-x}$$

$$\Leftrightarrow (9Ax + 9B)e^{-x} = xe^{-x} \quad \Leftrightarrow 9Ax + 9B = x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9A = 1 \\ 9B = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{9} \\ B = 0 \end{cases}$$

$$\bar{y}(x) = \frac{x}{9} e^{-x}$$

$$y(x) = y_0(x) + \bar{y}(x) = (C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x) + \frac{x}{9}) e^{-x}$$

$$3) \quad y'' - 3y' + 2y = \cos x + 2 \sin x$$

$y'' - 3y' + 2y = 0$ equazione omogenea associata

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 2)(\lambda - 1) \Rightarrow \lambda = 1, 2 \text{ sono le radici caratteristiche}$$

$$y_0(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$$

cerchiamo una soluzione particolare con il metodo di similitudine

$$\bar{y}(x) = A \cos x + B \sin x \quad [\lambda = i \text{ non \u00e9 radice di } p(\lambda)]$$

$$\bar{y}'(x) = -A \sin x + B \cos x$$

$$\bar{y}''(x) = -A \cos x - B \sin x$$

$\bar{y}$ \u00e9 soluzione di $y'' - 3y' + 2y = \cos x + 2 \sin x$

$$\Leftrightarrow (-A - 3B + 2A) \cos x + (-B + 3A + 2B) \sin x = \cos x + 2 \sin x$$

$$\Leftrightarrow (A-3B) \cos x + (B+3A) \sin x = \cos x + 2 \sin x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A-3B = 1 \\ B+3A = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1+3B \\ B+3+9B = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1+3B = \frac{7}{10} \\ B = -\frac{1}{10} \end{cases}$$

$$\bar{y}(x) = \frac{7}{10} \cos x - \frac{1}{10} \sin x$$

$$y(x) = y_0(x) + \bar{y}(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{1}{10} (7 \cos x - \sin x)$$

soluzione generale dell'equazione completa

$$4) \quad y'' - 10y' + 25y = e^x \cos x$$

$y'' - 10y' + 25y = 0$ equazione omogenea associata

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 10\lambda + 25 = (\lambda - 5)^2 \Rightarrow \lambda = 5 \text{ è radice doppia di } p(\lambda)$$

$$y_0(x) = (C_1 + C_2 x) e^{5x} \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Applichiamo il metodo di similitudine!

$$\bar{y}(x) = (A \cos x + B \sin x) e^x \quad [\lambda = 1 \pm i \text{ non è radice di } p(\lambda)]$$

$$\begin{aligned} \bar{y}'(x) &= (-A \sin x + B \cos x) e^x + (A \cos x + B \sin x) e^x \\ &= ((-A+B) \sin x + (A+B) \cos x) e^x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{y}''(x) &= ((-A+B) \cos x - (A+B) \sin x) e^x + ((-A+B) \sin x + (A+B) \cos x) e^x \\ &= (2B \cos x - 2A \sin x) e^x \end{aligned}$$

$\bar{y}$ è soluzione di $y'' - 10y' + 25y = e^x \cos x$

$$\Leftrightarrow (2B \cos x - 2A \sin x) e^x - 10((-A+B) \sin x + (A+B) \cos x) e^x + 25(A \cos x + B \sin x) e^x = e^x \cos x$$

$$\Leftrightarrow [(2B - 10(A+B) + 25A) \cos x + (-2A - 10(-A+B) + 25B) \sin x] e^x = e^x \cos x$$

$$\Leftrightarrow (15A - 8B) \cos x + (8A + 15B) \sin x = \cos x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 15A - 8B = 1 \\ 8A + 15B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{225}{8}B - 8B = 1 \\ A = -\frac{15}{8}B \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} B = -\frac{8}{289} \\ A = -\frac{15}{8} \cdot \left(-\frac{8}{289}\right) = \frac{15}{289} \end{cases} \quad \bar{y}(x) = \frac{e^x}{289} (15 \cos x - 8 \sin x)$$

$$y(x) = y_0(x) + \bar{y}(x) = (C_1 + C_2 x) e^{5x} + \frac{e^x}{289} (15 \cos x - 8 \sin x)$$

$$5) \quad 4y'' + 4y' + 2y = 3 \cos\left(\frac{x}{2}\right) e^{-\frac{x}{2}}$$

$4y'' + 4y' + 2y = 0$ equazioni omogenee associate

$$p(\lambda) = 4\lambda^2 + 4\lambda + 2 = 2(2\lambda^2 + 2\lambda + 1)$$

$$\Delta = 1 - 2 = -1 < 0$$

$$\lambda_{1/2} = \frac{-1 \pm i}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{i}{2}$$

$$y_0(x) = (C_1 \cos\left(\frac{x}{2}\right) + C_2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)) e^{-\frac{x}{2}}$$

determiniamo una soluzione particolare dell'equazione completa utilizzando il metodo della similitudine

$$\bar{y}(x) = x (A \cos\left(\frac{x}{2}\right) + B \sin\left(\frac{x}{2}\right)) e^{-\frac{x}{2}} \quad [\lambda = -\frac{1}{2} \pm \frac{i}{2} \text{ sono radici di } p(\lambda)]$$

$$\begin{aligned} \bar{y}'(x) &= (A \cos\left(\frac{x}{2}\right) + B \sin\left(\frac{x}{2}\right)) e^{-\frac{x}{2}} + x \left(-\frac{A}{2} \sin\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{B}{2} \cos\left(\frac{x}{2}\right)\right) e^{-\frac{x}{2}} \\ &\quad + x (A \cos\left(\frac{x}{2}\right) + B \sin\left(\frac{x}{2}\right)) \left(-\frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}}\right) \end{aligned}$$

$$= \left[\left(A + \frac{B}{2}x - \frac{A}{2}x\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right) + \left(B - \frac{A}{2}x - \frac{B}{2}x\right) \sin\left(\frac{x}{2}\right) \right] e^{-\frac{x}{2}}$$

$$= \left[\left(A + \frac{B-A}{2}x\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right) + \left(B - \frac{A+B}{2}x\right) \sin\left(\frac{x}{2}\right) \right] e^{-\frac{x}{2}}$$

$$\bar{y}''(x) = \left[\frac{B-A}{2} \cos\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2} \left(A + \frac{B-A}{2}x\right) \sin\left(\frac{x}{2}\right) \right] e^{-\frac{x}{2}}$$

$$+ \left[-\frac{A+B}{2} \sin\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2} \left(B - \frac{A+B}{2}x\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right) \right] e^{-\frac{x}{2}}$$

$$+ \left[\left(A + \frac{B-A}{2}x\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right) + \left(B - \frac{A+B}{2}x\right) \sin\left(\frac{x}{2}\right) \right] \left(-\frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}}\right)$$

$$= \left[\frac{B-A}{2} + \frac{1}{2} \left(B - \frac{A+B}{2}x\right) - \frac{1}{2} \left(A + \frac{B-A}{2}x\right) \right] \cos\left(\frac{x}{2}\right) e^{-\frac{x}{2}}$$

$$+ \left[-\frac{1}{2} \left(A + \frac{B-A}{2}x\right) - \frac{A+B}{2} - \frac{1}{2} \left(B - \frac{A+B}{2}x\right) \right] \sin\left(\frac{x}{2}\right) e^{-\frac{x}{2}}$$

$$= \left[B-A - \frac{B}{2}x \right] \cos\left(\frac{x}{2}\right) e^{-\frac{x}{2}} + \left[-(A+B) + \frac{A}{2}x \right] \sin\left(\frac{x}{2}\right) e^{-\frac{x}{2}}$$

Quindi

$$4\bar{y}''(x) + 4\bar{y}'(x) + 2\bar{y}(x)$$

$$= 4 \left[\left(B-A - \frac{B}{2}x\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right) + \left(-A-B + \frac{A}{2}x\right) \sin\left(\frac{x}{2}\right) \right] e^{-\frac{x}{2}}$$

$$+ 4 \left[\left(A + \frac{B-A}{2}x\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right) + \left(B - \frac{A+B}{2}x\right) \sin\left(\frac{x}{2}\right) \right] e^{-\frac{x}{2}}$$

$$+ 2 \left[A x \cos\left(\frac{x}{2}\right) + B x \sin\left(\frac{x}{2}\right) \right] e^{-\frac{x}{2}}$$

$$= \left[4 \left(B-A - \frac{B}{2}x\right) + 4 \left(A + \frac{B-A}{2}x\right) + 2Ax \right] \cos\left(\frac{x}{2}\right) e^{-\frac{x}{2}}$$

$$+ \left[4 \left(-A-B + \frac{A}{2}x\right) + 4 \left(B - \frac{A+B}{2}x\right) + 2Bx \right] \sin\left(\frac{x}{2}\right) e^{-\frac{x}{2}}$$

$$= \left[4B \cos\left(\frac{x}{2}\right) - 4A \sin\left(\frac{x}{2}\right) \right] e^{-\frac{x}{2}}$$

$$\bar{y}(x) \text{ è soluzione di } 4y'' + 4y' + 2y = 3 \cos\left(\frac{x}{2}\right) e^{-\frac{x}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \left[4B \cos\left(\frac{x}{2}\right) - 4A \sin\left(\frac{x}{2}\right) \right] e^{-\frac{x}{2}} = 3 \cos\left(\frac{x}{2}\right) e^{-\frac{x}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4B = 3 \\ -4A = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = \frac{3}{4} \\ A = 0 \end{cases}$$

$$\bar{y}(x) = \frac{3}{4}x \sin\left(\frac{x}{2}\right) e^{-\frac{x}{2}}$$

$$y(x) = y_0(x) + \bar{y}(x) = \left(c_1 \cos\left(\frac{x}{2}\right) + \left(c_2 + \frac{3}{4}x\right) \sin\left(\frac{x}{2}\right)\right) e^{-\frac{x}{2}}$$

Soluzioni generali del problema completo