

SERIE NUMERICHE

Definizione Una funzione $a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ si chiama **SUCCESSIONE** di numeri reali e si denota anche con i simboli $\{a_m\}_{m \in \mathbb{N}}$, $(a_m)_{m \in \mathbb{N}}$

Osservazione Possiamo considerare successioni definite in $\{m \in \mathbb{N} : m \geq m_0\}$ con $m_0 \in \mathbb{N}$, in tal caso utilizzeremo le notazioni $\{a_m\}_{m \geq m_0}$, $(a_m)_{m \geq m_0}$

Esempi $\{2^m\}_{m \in \mathbb{N}}$, $\{\frac{1}{m}\}_{m \geq 1}$

Definizione (PROPRIETA' DEFINITIVA) Sia $(a_m)_{m \in \mathbb{N}}$ una successione di numeri reali, P una proprietà. Diciamo che la successione $(a_m)_{m \in \mathbb{N}}$ verifica la proprietà P **DEFINITIVAMENTE** se $\exists N \in \mathbb{N}$ tale che $\forall m \geq N : a_m$ verifica P

Osserviamo che $D_\infty(\mathbb{N}) = \{+\infty\}$ (analogamente $D_\infty\{m \in \mathbb{N} : m \geq m_0\} = \{+\infty\}$) pertanto per le successioni possiamo considerare solamente il limite per $m \rightarrow +\infty$.
Traduciamo la definizione di limite di funzione nel linguaggio delle successioni.

Definizione (SUCCESSIONE CONVERGENTE) Sia $(a_m)_{m \in \mathbb{N}}$ una successione di numeri reali e sia $l \in \mathbb{R}$. Diciamo che la successione $(a_m)_{m \in \mathbb{N}}$ converge a l per $m \rightarrow +\infty$ e scriviamo $\lim_{m \rightarrow +\infty} a_m = l$ quando

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \text{ tale che } \forall m \in \mathbb{N}, m \geq N : |a_m - l| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : |a_m - l| < \varepsilon \text{ definitivamente}$$

Definizione (SUCCESSIONI DIVERGENTI) Sia $(a_m)_{m \in \mathbb{N}}$ una successione di numeri reali.

1) Diciamo che $(a_m)_{m \in \mathbb{N}}$ è **DIVERGENTE POSITIVAMENTE** e scriviamo

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} a_m = +\infty \text{ se è verificata la seguente proprietà:}$$

$$\forall M > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \text{ tale che } \forall m \in \mathbb{N}, m \geq N : a_m > M$$

$$\Leftrightarrow \forall M > 0 : a_m > M \text{ definitivamente}$$

2) Diciamo che $(a_m)_{m \in \mathbb{N}}$ è **DIVERGENTE NEGATIVAMENTE** e scriviamo

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} a_m = -\infty \text{ se è verificata la seguente proprietà:}$$

$$\forall M > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \text{ tale che } \forall m \in \mathbb{N}, m \geq N : a_m < -M$$

$$\Leftrightarrow \forall M > 0 : a_m < -M \text{ definitivamente}$$

Esempi

- 1) $\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{m} = 0$, $\lim_{m \rightarrow +\infty} \arctan(m) = \frac{\pi}{2}$
- 2) $\lim_{m \rightarrow +\infty} m^3 = +\infty$, $\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{2^m}{m^4} = +\infty$
- 3) $\lim_{m \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{1}{m}\right) = -\infty$

Definizione Sia $(a_m)_{m \in \mathbb{N}}$ una successione di numeri reali.

Diciamo che $(a_m)_{m \in \mathbb{N}}$ è **REGOLARE** se $\exists \lim_{m \rightarrow +\infty} a_m \in \mathbb{R}^*$, altrimenti

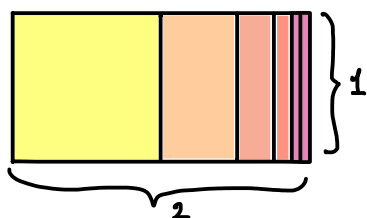
diciamo che $(a_m)_{m \in \mathbb{N}}$ è **IRREGOLARE**

Esempi 1) $\{(-1)^m\}_{m \in \mathbb{N}}$ è una successione irregolare

2) $\{(-2)^m\}_{m \in \mathbb{N}}$ è una successione irregolare

infatti $\lim_{m \rightarrow +\infty} (-2)^{2m} = \lim_{m \rightarrow +\infty} 2^{2m} = +\infty$

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} (-2)^{2m+1} = \lim_{m \rightarrow +\infty} -2^{2m+1} = -\infty$$



$$2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$$

cerchiamo di dare significato ai numeri di sospensioni

Definizione Sia $(a_m)_{m \in \mathbb{N}}$ una successione di numeri reali

$$S_m := \sum_{k=0}^m a_k = a_0 + a_1 + \dots + a_m$$

S_m si chiama **SOMMA PARZIALE m-ESIMA** di $(a_m)_{m \in \mathbb{N}}$

Definizione Sia $(a_m)_{m \in \mathbb{N}}$ una successione di numeri reali

Si dice **SERIE** di termine generale a_m la quantità

$$\sum_{m=0}^{+\infty} a_m = \lim_{N \rightarrow +\infty} S_N = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{m=0}^N a_m$$

In particolare diciamo che

$$\sum_{m=0}^{+\infty} a_m \text{ è CONVERGENTE} \Leftrightarrow \exists \lim_{m \rightarrow +\infty} S_m \in \mathbb{R}$$

$$\sum_{m=0}^{+\infty} a_m \text{ è DIVERGENTE POSITIVAMENTE} \Leftrightarrow \lim_{m \rightarrow +\infty} S_m = +\infty$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \text{ è DIVERGENTE NEGATIVAMENTE} \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = -\infty$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \text{ è IRREGOLARE / INDETERMINATA / OSCILLANTE} \Leftrightarrow \nexists \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$$

Osservazione In maniera analoga si introduce la nozione di serie

$\sum_{n=m_0}^{+\infty} a_n$ dove $m_0 \in \mathbb{N}$ e $\{a_n\}_{n \geq m_0}$ è una successione di numeri reali

Esempi fondamentali:

1) **Serie di Menopli** $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

la somma parziale n -esima si può calcolare in maniera esplicita

grazie all'uguaglianza $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

Pertanto $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$

2) $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n$ è una serie indeterminata poiché la successione delle somme parziali è $S_n = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ è pari} \\ 0 & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$

3) $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

riscriviamo il termine generale

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln(n+1) - \ln(n)$$

$$S_n = (\ln 2 - \ln 1) + (\ln 3 - \ln 2) + (\ln 4 - \ln 3) + \dots + (\ln(n+1) - \ln n)$$

$$= \ln(n+1) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

Pertanto $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = +\infty$

4) **Serie geometrica di ragione q** $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$ con $q \in \mathbb{R}$

Proviamo che

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } q \geq 1 \\ \frac{1}{1-q} & \text{se } q \in (-1, 1) \\ \text{indeterminata} & \text{se } q \leq -1 \end{cases}$$

Se $q=1$ allora $S_n = \underbrace{1+1+\dots+1}_{(n+1)\text{-volte}} = n+1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$

Se $q \neq 1$ e $S_n = 1+q+\dots+q^n$ allora

$$\begin{aligned}(1-q)S_n &= S_n - qS_n = 1+q+\dots+q^n - q(1+q+\dots+q^n) \\ &= 1+q+\dots+q^n - (q+q^2+\dots+q^{n+1}) = 1-q^{n+1}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

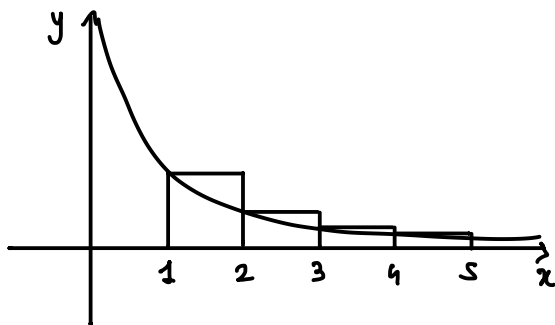
Osserviamo che $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } q > 1 \\ 1 & \text{se } q = 1 \\ 0 & \text{se } q \in (-1, 1) \\ \nexists & \text{se } q \leq -1 \end{cases}$

e quindi concludiamo quanto visto sopra per la serie geometrica

Osservazione Per $q = \frac{1}{2}$ abbiamo $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$
correttamente con l'esempio dei rettangoli colorati

5) **Serie armonica** $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$

Il metodo:



$$\frac{1}{n} \geq \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx \quad \text{geometricamente}$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} &\geq \sum_{n=1}^N \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx = \int_1^{N+1} \frac{1}{x} dx && \text{proprietà di additività dell'integrale definito} \\ &= [\ln x]_1^{N+1} && \text{(formula fondamentale del calcolo integrale)} \\ &= \ln(N+1) - \ln 1 \\ &= \ln(N+1) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} +\infty\end{aligned}$$

per il teorema del confronto $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} = +\infty$
cioè $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$

II metodo: $e = \sup_{n \geq 1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1 : \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1 : \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \ln e = 1$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1 : \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$

inoltre $\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \geq \sum_{n=1}^N \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln(N+1) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} +\infty$
 (Esempio 3)

applicando il teorema del confronto abbiamo che la serie armonica diverge positivamente

Proposizione (CONDIZIONE NECESSARIA per la CONVERGENZA di una SERIE)

Sia $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di numeri reali.

Se $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ è convergente allora $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$

Osservazione L'implicazione precedente non si inverte, cioè

$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0 \not\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ convergente

Controesempi: $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ sono serie divergenti positivamente pur essendo il termine generale infinitesimo

Esempi 1) $\sum_{n=1}^{+\infty} e^{\frac{1}{n}}$ non è convergente poiché $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{n}} = 1 \neq 0$
 2) $\sum_{n=0}^{+\infty} \cos(n)$ non è convergente poiché $\nexists \lim_{n \rightarrow +\infty} \cos(n)$

Definizioni Sia $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di numeri reali

- $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ è a termini POSITIVI se $\forall n \in \mathbb{N} : a_n > 0$
- $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ è a termini NON NEGATIVI se $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq 0$
- $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ è a termini DEFINITIVAMENTE POSITIVI se $a_n > 0$ definitivamente
- $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ è a termini DEFINITIVAMENTE NON NEGATIVI se $a_n \geq 0$ definitivamente

Proposizione Sia $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ una serie a termini definitivamente non negativi.
Allora $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ è convergente oppure è divergente positivamente.

Teorema (CRITERIO della RADICE)

Sia $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di numeri reali definitivamente non negativa.

Supponiamo che $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} =: l \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$

1) se $l \in [0, 1)$ allora $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ è convergente

2) se $l \in (1, +\infty) \cup \{+\infty\}$ allora $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ è divergente positivamente

NB: se $l = 1$ il criterio precedente non ci dà alcuna informazione sul carattere della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$

Esempi 1) $\sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-n^3}$ serie a termini positivi

applichiamo il criterio della radice

$$\sqrt[n]{2^{-n^3}} = (2^{-n^3})^{\frac{1}{n}} = 2^{-n^3 \cdot \frac{1}{n}} = 2^{-n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 < 1$$

la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-n^3}$ è convergente

2) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{n^5}$ serie a termini positivi

applichiamo il criterio della radice

$$\sqrt[n]{\frac{3^n}{n^5}} = \frac{3}{\sqrt[n]{n^5}} = 3 n^{-\frac{5}{n}} = 3 e^{-\frac{5 \ln n}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 3 \cdot e^0 = 3 > 1$$

la serie considerata è divergente per il criterio della radice

Teorema (CRITERIO del RAPPORTO)

Sia $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di numeri reali definitivamente positiva

Supponiamo che $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} =: l \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$

1) se $l \in [0, 1)$ allora $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ è convergente

2) se $l \in (1, +\infty) \cup \{+\infty\}$ allora $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ è divergente positivamente

NB: se $l = 1$ il criterio del rapporto non ci dà informazioni sul carattere della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$

Esempi 1) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$ serie a termini positivi

Applichiamo il criterio del rapporto

$$\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{\cancel{n!}}{(n+1) \cdot \cancel{n!}} = \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 < 1$$

per il criterio del rapporto la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$ è convergente

Bonus : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e$ utilizzando strumenti più avanzati (serie di Taylor)