MATEMATICA - LEZIONE 41

venerdì 13 dicembre 2024 11:11

Equazioni lineari di I ordine: $y' = a(x)y + g(x)$

Equazioni lineari di II ordine: $ay'' + by' + cy = g(x)$

Equazioni a variabili separabili

Sono equazioni del tipo $y' = a(x)\, b(y)$

TEOREMA Siano I e J due intervalli aperti. Siano $a : I \to \mathbb{R}$ continua in I e $b : J \to \mathbb{R}$ di classe C^1 in J. Allora $\forall\, x_0 \in I$ e $y_0 \in J$ $\exists\, I_0$ intervallo ed $\exists!\, y : I_0 \to \mathbb{R}$ tale che

1) $x_0 \in I_0$, $I_0 \subseteq I$.

2) $\begin{cases} y' = a(x)\, b(y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

Idea per risolvere $y' = a(x)\, b(y)$

$$\underbrace{\frac{y'}{b(y)}}_{\text{compare solo } y} = \underbrace{a(x)}_{\text{compare solo } x}$$

$$\frac{y'(x)}{b(y(x))} = a(x)$$

Integriamo $\displaystyle \int \frac{y'(x)}{b(y(x))}\, dx = \int a(x)\, dx$

- $\int a(x)\,dx = A(x) + c_1$ dove A è una primitiva di a
- $\int \frac{y'(x)}{b(y(x))}\,dx \overset{y=y(x)}{=} \int \frac{1}{b(y)}\,dy$

$$= B(y) + c_2$$ dove B è una primitiva di $\frac{1}{b}$

$$= B(y(x)) + c_2$$

Quindi:

$$B(y(x)) + c_2 = A(x) + c_1$$

$$B(y(x)) = A(x) + c \qquad (c = c_1 - c_2)$$

$$y(x) = B^{-1}(A(x) + c)$$

Attenzione :

1) Abbiamo diviso per $b(y)$. Questo si può fare solo per le soluzioni per cui $b(y(x)) \neq 0 \ \forall x$

2) Bisogna invertire B.

OSS : Se $y(x)$ è una soluzione e $\exists \, x_0$ t.c. $b(y(x_0))=0$ allora $y(x) = y(x_0) \ \forall x$.

DIM

Sia $y_0 = y(x_0)$. Allora $y(x)$ risolve il problema

$$\begin{cases} y' = a(x)\,b(y) \\ y(x_0) = y_0 . \end{cases}$$

Questo problema ha un'unica soluzione.

La soluzione è la funzione costante $y_0(x) = y_0 \ \forall x$

perché $y_0'(x) = 0 = a(x) \underbrace{b(y_0)}_{=0}$.

Quindi $y(x) = y_0(x) = y_0 \quad \forall x$.

Riepilogando un' equazione $y' = a(x)\, b(y)$ può avere:

1) Soluzioni costanti:
   Si trovano risolvendo l'eq. $b(y) = 0$.
2) Soluzioni per cui $b(y(x)) \neq 0 \ \forall x$. Si trovano dividendo per $b(y)$ e integrando

$$y' = a(x)\, b(y)$$

$$\frac{y'}{b(y)} = a(x)$$

$$\int \frac{1}{b(y)}\, dy = \int a(x)\, dx$$

$$B(y) = A(x) + c \quad \Rightarrow \quad y = B^{-1}(A(x) + c)$$

—

ESEMPIO

$$y' = x\, y^2$$

Eq. di I ordine a variabili separabili

$$a(x) = x \qquad b(y) = y^2$$

- Soluzioni costanti:

$$b(y) = 0 \iff y^2 = 0 \iff y = 0$$

Unica soluzione costante $y(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

- Soluzioni non costanti:

$$y' = x\, y^2$$

$$\frac{y'}{y^2} = x \qquad \left(\int \frac{y'(x)}{y(x)^2}\,dx \overset{\substack{dy = y'(x)\,dx \\ y = y(x)}}{=} \int \frac{1}{y^2}\,dy \right)$$

$$\int \frac{1}{y^2}\,dy = \int x\,dx$$

$$\int y^{-2}\,dy = \int x\,dx \qquad \int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c$$

- $\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 + c_1$
- $\int y^{-2}\,dy = \frac{y^{-1}}{-1} + c_2 = -\frac{1}{y} + c_2$

Quindi:

$$-\frac{1}{y} = \frac{1}{2}x^2 + c$$

$$\frac{1}{y} = -\frac{1}{2}x^2 - c$$

$$y = \frac{1}{-\frac{1}{2}x^2 - c} = -\frac{1}{\frac{1}{2}x^2 + c}$$

Soluzioni: $y(x) = -\dfrac{1}{\frac{1}{2}x^2 + c}$ con $c \in \mathbb{R}$

Conclusione:

Soluzione generale dell'equazione:

$$y(x) = -\frac{1}{\frac{1}{2}x^2 + c} \quad \vee \quad y(x) = 0.$$

Metodo di ricondursi

$$y' = a(x)\, b(y)$$

Se $b(y) \neq 0$: $\quad \dfrac{y'}{b(y)} = a(x)$

$$\int \frac{1}{b(y)}\, dy = \int a(x)\, dx$$

In fisica:

$$y' = a(x)\, b(y)$$

$$\frac{dy}{dx} = a(x)\, b(y)$$

$$dy = a(x)\, b(y)\, dx$$

$$\frac{dy}{b(y)} = a(x)\, dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{b(y)} = \int a(x)\, dx.$$

ESEMPIO 2

$$y' = \frac{(y-1)^4}{x^2+1} = \underbrace{\frac{1}{x^2+1}}_{a(x)} \cdot \underbrace{(y-1)^4}_{b(y)}$$

- Soluzioni costanti:

  $(y-1)^4 = 0 \iff y = 1$

  Unica soluzione costante è $y(x) = 1$.

- Soluzioni non costanti:

$$\frac{y'}{(y-1)^4} = \frac{1}{x^2+1}$$

$$\int \frac{dy}{(y-1)^4} = \int \frac{1}{x^2+1}\, dx$$

- $\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \arctan x + c_1$

- $\int \frac{1}{(y-1)^4}\,dy \overset{\substack{dz=dy\\ z=y-1}}{=} \int \frac{1}{z^4}\,dz = \int z^{-4}\,dz$

$$= \frac{z^{-3}}{-3} + c_2 = -\frac{1}{3z^3} + c_2$$

$$= -\frac{1}{3(y-1)^3} + c_2$$

$$-\frac{1}{3(y-1)^3} = \arctan x + C$$

$$\frac{1}{(y-1)^3} = -3\arctan x - 3C$$

$$(y-1)^3 = \frac{1}{-3\arctan x - 3C}$$

$$y-1 = \sqrt[3]{\frac{1}{-3\arctan x - 3C}} = -\sqrt[3]{\frac{1}{3\arctan x + 3C}}$$

$$y = 1 - \sqrt[3]{\frac{1}{3\arctan x + 3C}}$$

$$y = 1 - \frac{1}{\sqrt[3]{3\arctan x + 3C}}$$

Soluzione generale:

$$y(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt[3]{3\arctan x + 3C}} \quad \vee \quad y(x) = 1.$$

ESEMPIO

$$y' = \cos(2x)\cdot\frac{1}{y}$$

Eq. di primo ordine a variabili separabili:

$a(x) = \cos 2x \quad , \quad b(y) = \frac{1}{y}$

$a(x) = \cos 2x \quad , \quad b(y) = \frac{1}{y}$

- Sol. costanti : $\frac{1}{y} = 0$ impossibile

  non ci sono sol. costanti

- Sol. non costanti:

$$y' = \cos(2x) \cdot \frac{1}{y}$$

$$y \cdot y' = \cos(2x)$$

$$\int y \, dy = \int \cos 2x \, dx$$

- $\int y \, dy = \frac{1}{2} y^2 + c_1$
- $\int \cos 2x \, dx = \frac{\sin(2x)}{2} + c_2$

$\Big(\int \cos 2x \, dx =$ $\quad z = 2x \quad dz = 2 dx$ $\quad dx = \frac{1}{2} dz$

$= \int \cos z \, \frac{1}{2} dz = \frac{1}{2} \int \cos z \, dz$

$= \frac{1}{2} \sin z + c = \frac{1}{2} \sin(2x) + c \Big)$

$$\frac{1}{2} y^2 = \frac{\sin(2x)}{2} + c$$

$$y^2 = \sin(2x) + 2c$$

$$\sqrt{y^2} = \sqrt{\sin(2x) + 2c}$$

$$|y| = \sqrt{\sin(2x) + 2c}$$

$$y = \pm \sqrt{\sin(2x) + 2c}$$

Soluzione generale :

$$y(x) = \sqrt{\sin(2x) + 2c} \quad \vee \quad y(x) = -\sqrt{\sin(2x) + 2c}$$

ESEMPIO 4

$$\begin{cases} y' = \dfrac{\cos(2x)}{y} & \leftarrow \text{equazione} \\ y(0) = -2 & \leftarrow \text{condizione iniziale.} \end{cases}$$

- Prima si trova la sol. generale dell'equazione:

$$y(x) = \underbrace{\sqrt{\sin(2x)+2c}}_{\geq 0} \quad \vee \quad y(x) = \underbrace{-\sqrt{\sin(2x)+2c}}_{\leq 0}$$

- Imponiamo $y(0) = -2$

Siccome $y(0) = -2 < 0$ allora la soluzione del problema di Cauchy è del tipo

$$y(x) = -\sqrt{\sin(2x)+2c}$$

$$y(0) = -\sqrt{2c} \qquad \text{Voglio che } y(0) = -2$$

quindi

$$-\sqrt{2c} = -2$$

$$\sqrt{2c} = 2$$

$$2c = 4$$

$$c = 2$$

Quindi l'unica sol. del problema è

$$y(x) = -\sqrt{\sin(2x)+4}$$

ESEMPIO

$$\begin{cases} y' = e^{3x} \operatorname{sen} y \\ y(0) = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$a(x) = e^{3x} \qquad b(y) = \sin y$$

- La soluzione del problema non può essere costante perché se lo fosse sarebbe $y(x) = \frac{\pi}{2}$ ma $\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1$ $\quad \left(b\left(\frac{\pi}{2}\right) \neq 0 \right)$

$\operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = 1 \qquad (b(\frac{\pi}{2}) \neq 0)$

- la nostra soluzione non è costante

$$y' = e^{3x} \operatorname{sen} y$$

$$\frac{y'}{\operatorname{sen} y} = e^{3x}$$

$$\int \frac{1}{\operatorname{sen} y}\, dy = \int e^{3x}\, dx$$

- $\int e^{3x}\, dx = \frac{e^{3x}}{3} + c_1$
- $\int \frac{1}{\operatorname{sen} y}\, dy \qquad t = \tan \frac{y}{2} \quad$ cioè $\quad \frac{y}{2} = \arctan t$

$y = 2 \arctan t$

$dy = \underbrace{\frac{2}{1+t^2}}\, dt$

Formule parametriche

$\operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2}$ e $\cos t = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

$$\int \frac{1}{\operatorname{sen} y}\, dy = \int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2}\, dt$$

$$= \int \frac{\cancel{1+t^2}}{\cancel{2}t} \cdot \frac{\cancel{2}}{\cancel{1+t^2}}\, dt = \int \frac{1}{t}\, dt = \ln|t| + c_2$$

$$= \ln\left|\tan \frac{y}{2}\right| + c_2$$

Quindi:

$$\ln\left|\tan \frac{y}{2}\right| = \frac{1}{3} e^{3x} + c$$

Conviene determinare subito c (invece di farlo alla fine) usando $y(0) = \frac{\pi}{2}$

Sostituisco $x = 0 \qquad y = y(x) \Rightarrow y(0) = \frac{\pi}{2}$

Quindi

$$\ln\left|\tan\frac{\pi}{4}\right| = \frac{1}{3}e^{0} + c$$

$$\ln 1 = \frac{1}{3} + c$$

$$0 = \frac{1}{3} + c$$

Quindi $c = -\frac{1}{3}$

$$\ln\left|\tan\frac{y}{2}\right| = \frac{1}{3}e^{3x} \underbrace{- \frac{1}{3}}_{c}$$

$$\left|\tan\frac{y}{2}\right| = e^{\frac{1}{3}e^{3x} - \frac{1}{3}}$$

$$\tan\frac{y}{2} = \pm e^{\frac{1}{3}e^{3x} - \frac{1}{3}}$$

Posso determinare il segno giusto usando la condizione iniziale: $y(0) = \frac{\pi}{2}$

$$\tan\frac{\pi}{4} = \pm e^{\frac{1}{3}\cdot 1 - \frac{1}{3}}$$

$$1 = \pm e^{0}$$

$$1 = \pm 1$$

Il segno corretto è $+$

$$\tan\frac{y}{2} = e^{\frac{1}{3}e^{3x} - \frac{1}{3}}$$

$$\frac{y}{2} = \arctan\left(e^{\frac{1}{3}e^{3x} - \frac{1}{3}}\right)$$

$$y = 2\arctan\left(e^{\frac{1}{3}e^{3x} - \frac{1}{3}}\right)$$

Se abbiamo un'equazione $y' = a(x)\,y$.

Si può vedere in due modi:

- è un'eq. lineare omogenea di I ordine.

  Facile da risolvere:

  $y(x) = K e^{A(x)}$ dove $A(x)$ è una primitiva di A.

- è anche un'eq. a variabili separabili.

  $y' = a(x) \cdot b(y)$ con $b(y) = y$.

  Soluzione costante: $y(x) = 0$.

  Soluzioni non costanti:

$$y' = a(x)\, y$$

$$\frac{y'}{y} = a(x)$$

$$\int \frac{1}{y}\, dy = \int a(x)\, dx$$

$$\ln|y| = A(x) + C$$

$$|y| = e^{A(x)+C}$$

$$y = \pm e^{A(x)+C} = \pm e^{C} e^{A(x)}$$

la sol. generale è

$$y(x) = \underbrace{e^{C}}_{K>0} e^{A(x)} \lor y(x) = \underbrace{-e^{C}}_{K<0} e^{A(x)} \lor y(x) = \underbrace{0}_{K=0}$$

La soluzione si può sempre scrivere come

$y(x) = K e^{A(x)}$

Noi abbiamo visto:

1) Equazioni lineari di I ordine $y' = a(x)\, y + g(x)$
2) Eq. lineari di secondo ordine $a y'' + b y' + c y = g(x)$
3) Eq. a variabili separabili (di I° ordine) $y' = a(x)\, b(y)$

Ci sono tanti altri tipi di equazioni differenziali.

Equazioni lineari di ordine n a coefficienti costanti

Sono equazioni del tipo

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y + a_0 y = g(x)$$

con $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$.

Queste equazioni si possono risolvere con gli stessi metodi che abbiamo visto per l'ordine 2.

Per l'equazione omogenea $(g(x) = 0)$ si considera il polinomio caratteristico:

$$p(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0$$

- Se $\lambda \in \mathbb{R}$ è una radice del pol. $p(\lambda)$ di molteplicità m allora le funzioni
  $$e^{\lambda x}, \; e^{\lambda x} x, \; e^{\lambda x} x^2 \dots, \; e^{\lambda x} x^{m-1}$$
  sono soluzioni dell'eq. omogenea
- Se $\lambda = \alpha \pm i\beta$ è una radice complessa del pol. $p(\lambda)$ allora
  $$e^{\alpha x}\cos(\beta x), \; e^{\alpha x}\sin(\beta x), \; e^{\alpha x}\cos(\beta x)\, x, \; e^{\alpha x}\sin(\beta x)\, x$$
  $$\dots, \; e^{\alpha x}\cos(\beta x)\, x^{m-1}, \; e^{\alpha x}\sin(\beta x)\, x^{m-1}.$$

- Per le equazioni non omogenee si può usare il metodo di similarità per trovare una soluzione particolare $\bar{y}(x)$. E la sol. generale è del tipo
  $$y(x) = y_0(x) + \bar{y}(x)$$
  dove y_0 è la sol. dell'equazione omogenea associata a quella di partenza

ESEMPIO

$$y''' - 3y' + 2y = 0$$

Eq. omogenea lineare di terzo ordine

$$p(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda + 2$$

$$\lambda^3 - 3\lambda + 2 = 0$$

- $\lambda = 1$ è una radice : $1 - 3 + 2 = 0$

	1	0	-3	2
1		1	1	-2
	1	1	-2	0

$$(\lambda - 1)(\underbrace{\lambda^2 + \lambda - 2}) = 0$$

$$\lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$$

$$(\lambda - 1)^2(\lambda + 2) = 0$$

1 è una radice di molt. 2 $(e^x, e^x x)$

-2 è una radice di molt. 1. (e^{-2x})

La soluzione generale è

$$y_0(x) = C_1 e^x + C_2 e^x x + C_3 e^{-2x}.$$

Altro metodo: sostituzioni

ESEMPIO

$$y'' = e^{y'}$$

eq. di secondo ordine ma non è lineare.

Sostituzione : $z = y'$

$$z' = e^z$$

$$z' = 1 \cdot e^z \qquad a(x) = 1 \quad . \quad b(z) = e^z$$

$$\frac{z'}{e^z} = 1$$

$$\int \frac{1}{e^z}\,dz = \int 1\,dx$$

$$-e^{-z} = x + c$$

$$e^{-z} = -c - x$$

$$-z = \ln(-c - x)$$

$$z = \ln(-x - c)$$

$$y' = z$$

$$y = \int z\,dx = \int \ln(-x + c)\,dx$$