

Esercitazione sulle EDO lineari (metodo di similitudine)

Equazioni differenziali lineari del I ordine

1) $y' = 5y + 10x^2 - \frac{9}{5}$

la soluzione generale dell'equazione omogenea $y' = 5y$

$$y_0(x) = K e^{5x}$$

Poiché il termine non omogeneo $f(x) = 10x^2 - \frac{9}{5}$ è un polinomio di secondo grado, cerchiamo una soluzione particolare $\bar{y}(x)$ della equazione completa della forma $\bar{y}(x) = Ax^2 + Bx + C$

Determiniamo $A, B, C \in \mathbb{R}$ tale da $\bar{y}'(x) = 5\bar{y}(x) + 10x^2 - \frac{9}{5}$
 $\bar{y}'(x) = 2Ax + B$

$\bar{y}$ è soluzione di $y' = 5y + 10x^2 - \frac{9}{5}$

$$\Leftrightarrow 2Ax + B = 5(Ax^2 + Bx + C) + 10x^2 - \frac{9}{5}$$

$$\Leftrightarrow (5A + 10)x^2 + (-2A + 5B)x - B + 5C - \frac{9}{5} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5A + 10 = 0 \\ -2A + 5B = 0 \\ -B + 5C - \frac{9}{5} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -2 \\ B = \frac{2}{5}A = -\frac{4}{5} \\ C = \frac{1}{5}B + \frac{9}{25} = \frac{1}{5} \end{cases}$$

Abbiamo trovato la soluzione particolare

$$\bar{y}(x) = -2x^2 - \frac{4}{5}x + \frac{1}{5} \text{ dell'equazione completa}$$

la soluzione generale dell'equazione è data da

$$y(x) = y_0(x) + \bar{y}(x) = K e^{5x} - 2x^2 - \frac{4}{5}x + \frac{1}{5}$$

2) $y' = -3y + x e^{-x}$

la soluzione generale dell'equazione omogenea $y' = -3y$

$$\text{è } y_0(x) = K e^{-3x}$$

Applichiamo il metodo di similitudine, consideriamo

$$\bar{y}(x) = (Ax + B) e^{-x}$$

Calcoliamo $\bar{y}'$

$$\bar{y}'(x) = A e^{-x} + (Ax+B) (-e^{-x}) = (A-B-Ax)e^{-x}$$

$\bar{y}$ è soluzione di $y' = -3y + x e^{-x}$

$$\Leftrightarrow (A-B-Ax)e^{-x} = -3(Ax+B)e^{-x} + x e^{-x}$$

$$\Leftrightarrow (A-B-Ax)e^{-x} + 3(Ax+B)e^{-x} - x e^{-x} = 0$$

$$\Leftrightarrow ((2A-1)x + A+2B)e^{-x} = 0$$

$$\Leftrightarrow (2A-1)x + A+2B = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2A-1=0 \\ A+2B=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=\frac{1}{2} \\ B=-\frac{A}{2}=-\frac{1}{4} \end{cases}$$

le soluzioni generali dell'equazione completa è data da

$$y(x) = y_0(x) + \bar{y}(x) = K e^{-3x} + \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right) e^{-x}$$

3) $y' = -3y + e^{-3x}$

L'equazione omogenea è la stessa vista nell'esercizio 2)

Applichiamo il metodo di similitudine per calcolare $\bar{y}(x)$

Poiché siamo nel caso $\alpha = \alpha$, consideriamo

$$\bar{y}(x) = Ax e^{-3x}$$

$$\bar{y}'(x) = A(e^{-3x} + x e^{-3x} \cdot (-3)) = A(1-3x)e^{-3x}$$

$$\bar{y} \text{ è soluzione } y' = -3y + e^{-3x} \Leftrightarrow A(1-3x)e^{-3x} = -3Ax e^{-3x} + e^{-3x}$$

$$\Leftrightarrow A e^{-3x} - 3Ax e^{-3x} = -3Ax e^{-3x} + e^{-3x}$$

$$\Leftrightarrow A e^{-3x} = e^{-3x} \Leftrightarrow A = 1$$

le soluzioni generali dell'equazione completa è data da

$$y(x) = y_0(x) + \bar{y}(x) = K e^{-3x} + x e^{-3x} = (K+x) e^{-3x}$$

Equazioni differenziali lineari del II ordine

Riassunto sulla teoria per l'equazione omogenea:

(*) $ay'' + by' + cy = 0$ equazione differenziale lineare

del II ordine a coefficienti costanti, con $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$

$$p(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c \quad \text{polinomio caratteristico}$$

- a) Se $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ allora, dati λ_1, λ_2 le radici reali e distinte di $p(\lambda)$, la soluzione generale di (*) è data da $y_0(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$
- b) Se $\Delta = 0$ allora $\lambda_1 = -\frac{b}{2a}$ è una radice doppia di $p(\lambda)$ e la soluzione generale di (*) è data da $y_0(x) = (C_1 + C_2 x) e^{-\lambda_1 x}$
- c) Se $\Delta < 0$ allora, dati, $\lambda_{1/2} = \alpha \pm i\beta$ le radici complesse e coniugate di $p(\lambda)$, la soluzione generale di (*) è data da $y_0(x) = C_1 e^{\alpha x} \cos(\beta x) + C_2 e^{\alpha x} \sin(\beta x)$

Osservazione: Per l'equazione completa $ay'' + by' + cy = g(x)$ applichiamo il metodo di similitudine per alcuni classi di termini non omogenei $g(x)$.

$$1) \begin{cases} y'' - 3y' + 2y = x^2 + 5x - 1 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases} \quad \text{problema di Cauchy}$$

Determiniamo la soluzione generale dell'equazione omogenea associata $y'' - 3y' + 2y = 0$.

Il polinomio caratteristico è dato da $p(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 1 \quad \lambda_{1/2} = \frac{3 \pm 1}{2} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$$

$$y_0(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x} \quad \text{al valore di } C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Poiché $g(x) = x^2 + 5x - 1$ è un polinomio di II grado

e $\lambda = 0$ non è radice di $p(\lambda)$ cerchiamo una

soluzione particolare del tipo $\bar{y}(x) = Ax^2 + Bx + C$

con $A, B, C \in \mathbb{R}$ costanti da determinare.

$$\bar{y}'(x) = 2Ax + B, \quad \bar{y}''(x) = 2A \quad \text{quindi}$$

$$\bar{y} \text{ è soluzione di } y'' - 3y' + 2y = x^2 + 5x - 1$$

$$\Leftrightarrow 2A - 3(2Ax + B) + 2(Ax^2 + Bx + C) = x^2 + 5x - 1$$

$$\Leftrightarrow 2Ax^2 + (-6A + 2B)x + 2A - 3B + 2C = x^2 + 5x - 1$$

$$\Leftrightarrow 2Ax^2 + 2(-3A + B)x + 2A - 3B + 2C = x^2 + 5x - 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2A = 1 \\ -3A + B = \frac{5}{2} \\ 2A - 3B + 2C = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ B = \frac{5}{2} + 3A = 4 \\ C = -A + \frac{3}{2}B - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} + 6 - \frac{1}{2} = 5 \end{cases}$$

$$\bar{y}(x) = \frac{x^2}{2} + 4x + 5$$

la soluzione generale dell'equazione completa è data da

$$y(x) = y_0(x) + \bar{y}(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{x^2}{2} + 4x + 5$$

$$y'(x) = C_1 e^x + 2C_2 e^{2x} + x + 4$$

Risolviamo il problema di Cauchy imponendo le condizioni iniziali

$$y(0) = 0 \Rightarrow 0 = C_1 + C_2 + 5$$

$$y'(0) = 1 \Rightarrow 1 = C_1 + 2C_2 + 4$$

risolviamo il sistema 2×2

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = -5 \\ C_1 + 2C_2 = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = -5 - C_2 = -7 \\ C_2 = 2 \end{cases}$$

$$y(x) = -7e^x + 2e^{2x} + \frac{x^2}{2} + 4x + 5$$

$$2) \quad y'' - 4y = e^{-2x}$$

Determiniamo una soluzione dell'equazione omogenea

associata $y'' - 4y = 0$. Consideriamo il polinomio caratteristico

$p(\lambda) = \lambda^2 - 4$, le cui radici reali e distinte sono $\lambda = \pm 2$

$$y_0(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Poiché $g(x) = e^{-2x}$ e $\lambda = -2$ è una radice semplice di $p(\lambda)$

cerchiamo una soluzione particolare $\bar{y}(x) = Ax e^{-2x}$

Determiniamo $A \in \mathbb{R}$ tale che $\bar{y}$ sia soluzione di $y'' - 4y = e^{-2x}$

$$\bar{y}'(x) = A e^{-2x} - 2Ax e^{-2x}$$

$$\bar{y}''(x) = -2A e^{-2x} - 2A e^{-2x} + 4Ax e^{-2x} = -4A e^{-2x} + 4Ax e^{-2x}$$

$$\bar{y} \text{ è soluzione di } y'' - 4y = e^{-2x} \Leftrightarrow -4Ae^{-2x} + 4Ax e^{-2x} - 4Ax e^{-2x} = e^{-2x}$$

$$\Leftrightarrow -4Ae^{-2x} = e^{-2x} \Leftrightarrow A = -\frac{1}{4}$$

la soluzione generale dell'equazione completa è data da

$$y(x) = y_0(x) + \bar{y}(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} - \frac{x}{4} e^{-2x}$$

$$= C_1 e^{2x} + \left(C_2 - \frac{x}{4}\right) e^{-2x} \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

3) $y'' - 4y' + 5y = 3x + 1$

$y'' - 4y' + 5y = 0$ equazione omogenea associata

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 5 \quad \Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -4 < 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{4 \pm 2i}{2} = 2 \pm i$$

$$y_0(x) = C_1 e^{2x} \cos x + C_2 e^{2x} \sin x$$

$g(x) = 3x + 1$ è un polinomio di grado 1

poiché $\lambda = 0$ non è radice di $p(\lambda)$ cerchiamo $\bar{y}(x) = Ax + B$

$$\bar{y}'(x) = A, \quad \bar{y}''(x) = 0$$

$$\bar{y} \text{ è soluzione di } y'' - 4y' + 5y = 3x + 1 \Leftrightarrow -4A + 5(Ax + B) = 3x + 1$$

$$\Leftrightarrow 5Ax - 4A + 5B = 3x + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 5A = 3 \\ -4A + 5B = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{3}{5} \\ B = \frac{4}{5}A + \frac{1}{5} = \frac{17}{25} \end{cases}$$

la soluzione generale dell'equazione completa è

$$y(x) = y_0(x) + \bar{y}(x) = C_1 e^{2x} \cos x + C_2 e^{2x} \sin x + \frac{3}{5}x + \frac{17}{25}$$

4) $y'' + y = \sin x$

$y'' + y = 0$ equazione omogenea associata

$p(\lambda) = \lambda^2 + 1$ le radici di p sono complesse e coniugate, $\pm i$

$$y_0(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

$g(x) = \sin x$ poiché $\lambda = i$ è radice (semplice) cerchiamo

$$\bar{y}(x) = Ax \cos x + Bx \sin x$$

$$\bar{y}'(x) = A \cos x - Ax \sin x + B \sin x + Bx \cos x$$

$$= (A+Bx) \cos x + (B-Ax) \sin x$$

$$\bar{y}''(x) = B \cos x - (A+Bx) \sin x - A \sin x + (B-Ax) \cos x$$

$$= (2B-Ax) \cos x - (2A+Bx) \sin x$$

$$\bar{y} \text{ è soluzione } y'' + y = \sin x$$

$$\Leftrightarrow (2B-Ax) \cos x - (2A+Bx) \sin x + Ax \cos x + Bx \sin x = \sin x$$

$$\Leftrightarrow 2B \cos x - 2A \sin x = \sin x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2B = 0 \\ -2A = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = 0 \\ A = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

le soluzioni generali dell'equazione completa è data da

$$y(x) = y_0(x) + \bar{y}(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{x}{2} \cos x \\ = (C_1 - \frac{x}{2}) \cos x + C_2 \sin x$$

$$5) y'' + 2y' + y = xe^{-x}$$

$$y'' + 2y' + y = 0 \quad \text{equazione omogenea associata}$$

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda+1)^2 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -1 \text{ è radice doppia di } p(\lambda)$$

le soluzioni generali del problema omogeneo è

$$y_0(x) = (C_1 + C_2 x) e^{-x} \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

$$g(x) = x e^{-x}, \quad \lambda = -1 \text{ è radice doppia di } p(\lambda)$$

$$\bar{y}(x) = x^2 (Ax+B) e^{-x} = (Ax^3+Bx^2) e^{-x}$$

$$\bar{y}'(x) = (3Ax^2 + 2Bx) e^{-x} - (Ax^3+Bx^2) e^{-x} = (-Ax^3 + (3A-B)x^2 + 2Bx) e^{-x}$$

$$\bar{y}''(x) = (6Ax + 2B) e^{-x} - 2(3Ax^2 + 2Bx) e^{-x} + (Ax^3+Bx^2) e^{-x}$$

$$= (Ax^3 + (-6A+B)x^2 + (6A-2B)x + 2B) e^{-x}$$

pertanto

$$(\bar{y}''(x) + 2\bar{y}'(x) + \bar{y}(x)) e^x = Ax^3 + (-6A+B)x^2 + (6A-2B)x + 2B \\ - 2Ax^3 + (6A-2B)x^2 + 4Bx + Ax^3 + Bx^2 \\ = 2(3A+B)x + 2B$$

$\bar{y}$ è soluzione di $y'' + 2y' + y = xe^{-x}$

$$\Leftrightarrow [2(3A+B)x + 2B] e^{-x} = xe^{-x}$$

$$\Leftrightarrow 2(3A+B)x + 2B = x \quad \Leftrightarrow \begin{cases} 2(3A+B) = 1 \\ 2B = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{6} \\ B = 0 \end{cases} \quad \bar{y}(x) = \frac{x^3}{6} e^{-x} \text{ soluzione particolare}$$

la soluzione generale dell'equazione completa è data da

$$\begin{aligned} y(x) = y_0(x) + \bar{y}(x) &= (C_1 + C_2 x) e^{-x} + \frac{x^3}{6} e^{-x} \\ &= (C_1 + C_2 x + \frac{x^3}{6}) e^{-x} \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$