MATEMATICA - LEZIONE 4

lunedì 7 ottobre 2024   09:03

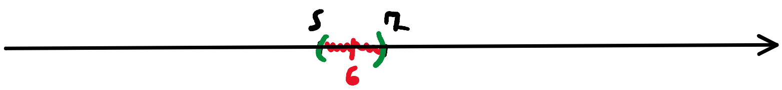
Commenti sulla rappresentazione degli intervalli

Abbiamo detto che

$$(a, b) = (x_0 - r, x_0 + r) \quad \text{dove}$$

$$x_0 = \frac{a+b}{2} \qquad r = \frac{b-a}{2}$$

$(5, 7)$



$x_0 = 6 \qquad (5, 7) = (6-1, 6+1)$

$$= \{ x \in \mathbb{R} \mid |x-6| < 1 \}$$

Ricordiamo che:

$|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a$

$|x| < a \iff -a < x < a$

Nell'esempio precedente:

$$|x-6| < 1 \iff -1 < x-6 < 1$$

$$\iff \begin{cases} x - 6 > -1 \\ x - 6 < 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x > 5 \\ x < 7 \end{cases}$$

$$\iff 5 < x < 7$$

Invece:

$|x| \geq 4$

$x \geq 4 \quad \vee \quad x \leq -4$

PROPRIETÀ DELLE POTENZE

1) $\forall x, y \in \mathbb{R}$ e $\forall n \in \mathbb{R}$: $\quad x^n \cdot y^n = (xy)^n$

2) $\forall x \in \mathbb{R}$, $x > 0$, e $\forall n, s \in \mathbb{R}$: $\quad x^n \cdot x^s = x^{n+s}$

2) $\forall x \in \mathbb{R},\ x>0,$ e $\forall n, s \in \mathbb{R}$: $\quad x^n \cdot x^s = x^{n+s}$

3) $\forall x \in \mathbb{R},\ x>0$ e $\forall n, s \in \mathbb{R}$: $\quad (x^n)^s = x^{ns}$

4) $\forall x \in \mathbb{R},\ x>0$ e $\forall n \in \mathbb{R}$: $\quad x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$

5) $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n, s \in \mathbb{R},\ x>0$: $\quad \dfrac{x^n}{x^s} = x^{n-s}$

6) $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x, y>0$ e $\forall n \in \mathbb{R}$: $\quad \dfrac{x^n}{y^n} = \left(\dfrac{x}{y}\right)^n$

7) $\forall x \in \mathbb{R} \quad x^0 = 1$ e $x^1 = x$

8) $\forall x \in \mathbb{R},\ x>0,\ x \neq 1$ e $\forall n, s \in \mathbb{R}$:

$$x^n = x^s \iff n = s$$

9) $\forall x \in \mathbb{R},\ \boxed{x>1}$ e $\forall n, s \in \mathbb{R}$:

$$x^n \leq x^s \iff n < s$$
$$x^n \geq x^s \iff n \geq s$$
$$x^n > x^s \iff n > s$$
$$x^n < x^s \iff n < s$$

10) $\forall x \in \mathbb{R},\ \boxed{0<x<1}$ e $\forall n, s \in \mathbb{R}$

$$x^n \leq x^s \iff n \geq s$$
$$x^n \geq x^s \iff n \leq s$$
$$x^n > x^s \iff n < s$$
$$x^n < x^s \iff n > s$$

ESEMPI

- $\dfrac{(5^2 \cdot 5^3)^8}{5^{15}} = \dfrac{(5^5)^8}{5^{15}} = \dfrac{5^{40}}{5^{15}} = 5^{25}$

- $2^8 \cdot 6^{-4} \cdot 3^2 = 2^8 \cdot 2^{-4} \cdot 3^{-4} \cdot 3^2$
$= 2^4 \cdot 3^{-2} = \frac{16}{3^2} = \frac{16}{9}$

- La metà di 8^{10} è ?
$\frac{1}{2} 8^{10} = \frac{1}{2} (2^3)^{10} = \frac{1}{2} 2^{30} = \frac{2^{30}}{2} = 2^{30-1} = 2^{29}$

- $\frac{4}{\sqrt[3]{2}} = \frac{2^2}{2^{\frac{1}{3}}} = 2^{2-\frac{1}{3}} = 2^{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{2^5}$
$= \sqrt[3]{2^3 \cdot 2^2} = \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{4} = 2\sqrt[3]{4}$

Attenzione:

$(x+y)^n \neq x^n + y^n$

$\sqrt[n]{x+y} \neq \sqrt[n]{x} + \sqrt[n]{y}$

Potenze di un binomio:

$(x+y)^0 = 1$

$(x+y)^1 = x+y$

$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

$(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1

(TRIANGOLO DI TARTAGLIA)

Quadrato di una somma di più termini

$(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$

$$(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz$$

$$(x+y+z+w)^2 = x^2+y^2+y^2+w^2+2xy+2xz+2xw$$
$$+2yz+2yw+2zw.$$

Equazioni / disequazioni polinomiali (in una variabile)

Un POLINOMIO (di variabile x) è un'espressione del tipo

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

con $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 \in \mathbb{R}$. (se $a_n \neq 0$, n è il GRADO

Un equazione / disequazione polinomiale è un'equazione / disequazione del tipo

$p(x)=0$, $p(x) \geq 0$, $p(x) \leq 0$, $p(x) < 0$, $p(x) > 0$

dove p è un polinomio

Caso più semplice: polinomi di grado 1

$$p(x) = ax+b \quad \text{con } a \neq 0.$$

- $ax+b=0 \iff ax=-b \iff x=-\dfrac{b}{a}$
- $ax+b \geq 0 \iff ax \geq -b \iff \begin{cases} x \geq -\dfrac{b}{a} & \text{se } a>0 \\ x \leq -\dfrac{b}{a} & \text{se } a<0. \end{cases}$

ESEMPI

1) $-3x \leq -6$

$$x \geq \frac{-6}{-3}$$

$$x \geq 2$$

2) $\frac{3}{2}x + \frac{7}{3} - x + \frac{5}{6} \geq -\frac{5}{8}x + \frac{11}{3}$

$$\frac{3}{2}x - x + \frac{5}{8}x \geq \frac{11}{3} - \frac{7}{3} - \frac{5}{6}$$

$$x\underbrace{\left(\frac{3}{2} - 1 + \frac{5}{8}\right)}_{\frac{9}{8}} \geq \underbrace{\frac{4}{3} - \frac{5}{6}}_{\frac{3}{6} = \frac{1}{2}}$$

$$\frac{9}{8}x \geq \frac{1}{2}$$

$$x \geq \frac{\frac{1}{2}}{\frac{9}{8}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{9} = \frac{4}{9}$$

$$x \geq \frac{4}{9}$$

Polinomi di 2° grado

$p(x) = ax^2 + bx + c$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

Consideriamo l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$

PROPOSIZIONE

Siano $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Sia $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Se $\Delta > 0$, l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ ha due soluzioni reali: $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$
- Se $\Delta = 0$, l'equazione ha una sola soluzione reale $x = -\frac{b}{2a}$

. Se $\Delta<0$, l'equazione $ax^2+bx+c=0$ non ha soluzioni reali.

DIMOSTRAZIONE

$$ax^2+bx+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$$

$$= a\left(x^2+2\cdot\frac{b}{2a}x+\frac{c}{a}\right)$$

$$= a\left(x^2+2\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right)$$

$$= a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}\right)\right)$$

$$= a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right)$$

. Se $\Delta<0$: l'equazione $ax^2+bx+c=0$ si riscrive come:

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{\Delta}{4a^2}<0$$ impossibile (no soluzioni)

. Se $\Delta=0$: $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0 \iff x=-\frac{b}{2a}$

. Se $\Delta>0$:

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}=0$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2=0$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)=0$$

$$x=-\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \vee \quad x=-\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

ESEMPIO

- $2x^2 + x - 3 = 0$

$\Delta = 1^2 - 4(2\cdot(-3)) = 1 + 24 = 25$ ($\Delta > 0$, due soluzioni)

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{4} = \begin{cases} \frac{-1+5}{4} = 1 \\ \frac{-1-5}{4} = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

- $2x^2 + x + 3 = 0$

$\Delta = 1 - 24 = -23 < 0$ no soluzioni.

OSS

1) Se $c = 0$ $\quad ax^2 + bx = 0 \iff x(ax+b) = 0$

$\iff x = 0 \vee x = -\frac{b}{a}$

2) Se $b = 0$: $\quad ax^2 + c = 0$

$x^2 = -\frac{c}{a}$

- Se $-\frac{c}{a} > 0$: $\quad x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$
- Se $-\frac{c}{a} = 0$: $\quad x = 0$
- Se $-\frac{c}{a} < 0$: $\quad$ nessuna soluzione.

3) Se $\Delta > 0$: $\quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\Delta}}{a} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{\Delta}{4}}}{a}$

$$= \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}}{a}$$ (FORMULA RIDOTTA)

ESEMPIO

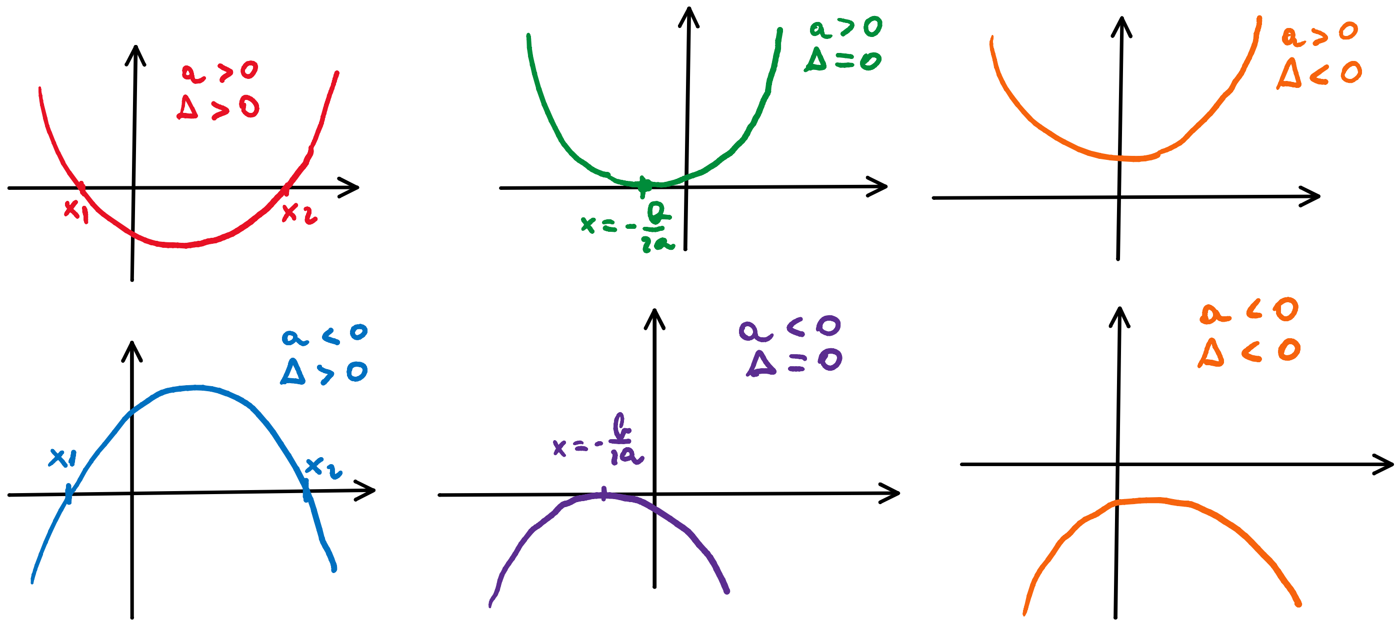
$x^2 + 8x - 9 = 0$ $\quad x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16+9}}{1} = -4 \pm 5 \begin{cases} 1 \\ -9 \end{cases}$

4) $a x^2 + b x + c = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right)$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

Questo ci dice che $y = ax^2 + bx + c$ rappresenta una parabola con vertice in $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ e concavità che dipende da a.

(si ottiene a partire da $y = x^2$ con traslazioni e dilatazioni)



Questi grafici ci permettono di risolvere le disequazioni di secondo grado

$ax^2 + bx + c \geq 0$ / $ax^2 + bx + c \leq 0$ / $ax^2 + bx + c > 0$ / $ax^2 + bx + c < 0$

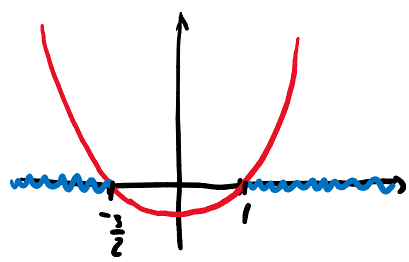
ESEMPI

1) $2x^2 + x - 3 \geq 0$

$2x^2 + x - 3 = 0$

>0

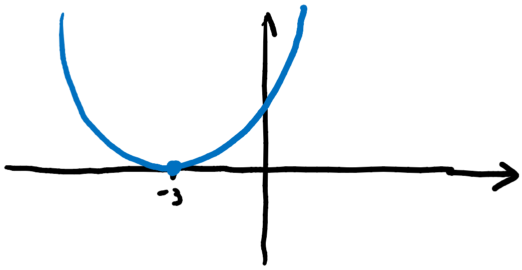
$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{4} = \begin{cases} 1 \\ -\frac{3}{2} \end{cases}$



soluzioni della disequazione:

$x \leq -\frac{3}{2} \quad \vee \quad x \geq 1.$

2) $x^2 + 6x + 9 \leq 0$



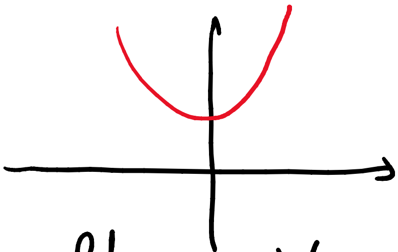
$x^2 + 6x + 9 = 0$

$x_{1,2} = -3 \pm 0$

$x = 3$

L'unica soluzione di $x^2 + 6x + 9 \leq 0$ è $x = -3$.

3) $10x^2 + 3x + 1 > 0$

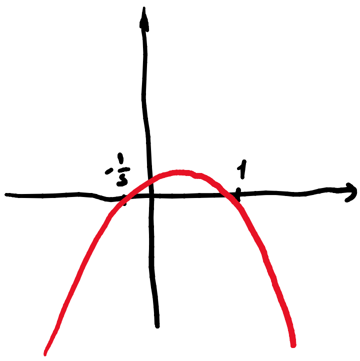


$\Delta = 9 - 40 < 0$

La disequazione

$10x^2 + 3x + 1 > 0$ è risolta $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

3) $1 + 4x - 5x^2 \leq 0$



$\frac{\Delta}{4} = 4 + 5 = 9$

$x_{1,2} = \frac{-2 \pm 3}{-5} = \begin{cases} 1 \\ -\frac{1}{5} \end{cases}$

Soluzioni della disequazione:

$x \leq -\frac{1}{5} \quad \vee \quad x \geq 1$

Oppure: $1 + 4x - 5x^2 \le 0$

$$5x^2 - 4x - 1 \ge 0$$

$$x \ge 1 \quad \vee \quad x \le -\frac{1}{5}$$

E se il grado è ≥ 3 ?

Se il polinomio si può scrivere come prodotto di polinomi di grado 1 o 2 possiamo ricondurci ai casi precedenti.

ESEMPI

1) $(x-1)(x^2-4) = 0$

$$x - 1 = 0 \quad \vee \quad x^2 - 4 = 0$$

$$x = 1 \quad \vee \quad x = \pm 2$$

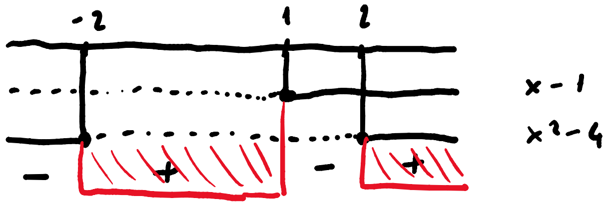
2) $(x-1)(x^2-4) \ge 0$

Rappresentare i segni dei singoli fattori:

$$x - 1 \ge 0 \iff x \ge 1$$

$$x^2 - 4 \ge 0 \iff x \ge 2 \ \vee x \le -2$$

Segno del prodotto:



Soluzioni:

$$-2 \le x \le 1 \quad \vee \quad x \ge 2.$$