MATEMATICA - LEZIONE 39

mercoledì 11 dicembre 2024 09:04

Equazioni lineari di I ordine: $y' = a(x)\, y + g(x)$

EQUAZIONI LINEARI DI I ORDINE: $y'(x) = a(x)\, y + g(x)$.

- Se $g(x) \equiv 0$ (eq. omogenea): $y(x) = K e^{A(x)}$ con $K \in \mathbb{R}$ e $\int a(x)\,dx = A(x) + c$.
- Se $g(x) \not\equiv 0$ (eq. completa): la soluzione è del tipo

$y(x) = \bar{y}(x) + y_0(x)$ dove $y_0(x)$ È LA SOLUZIONE GENERALE DELL'EQUAZIONE OMOGENEA $y' = a(x)\, y$ e $\bar{y}(x)$ è una SOLUZIONE PARTICOLARE DELL'EQUAZIONE COMPLETA

La soluzione $\bar{y}$ si può trovare:

1) con il metodo di VARIAZIONE DELLE COSTANTI $(\bar{y}(x) = K(x) e^{A(x)})$
2) con il metodo di SIMILARITÀ (solo se $a(x)$ è costante).

METODO DI SIMILARITÀ PER EQUAZIONI LINEARI DI PRIMO ORDINE

Consideriamo un'equazione lineare di I ordine del tipo $y' = a y + g(x)$ con $a \in \mathbb{R}$. Allora possiamo cercare una soluzione particolare $\bar{y}(x)$ di uno dei seguenti tipi:

1) Se $g(x) = p(x)$ è un polinomio di grado n e $a \neq 0$, $\bar{y}(x)$ è un pol. di grado al più n.

2) Se $g(x) = e^{\alpha x} p(x)$ con p polinomio di grado n allora
$$\bar{y}(x) = \begin{cases} e^{\alpha x} q(x) & \text{se } \alpha \neq a \\ e^{\alpha x} q(x)\, x & \text{se } \alpha = a \end{cases}$$
dove $q(x)$ è un polinomio di grado al più n.

3) Se $g(x) = \cos(\beta x)\, p(x)$ o $g(x) = \sin(\beta x)\, p(x)$ con $\beta \neq 0$ e p polinomio di grado n, allora

$$\bar{y}(x) = q_1(x) \cos \beta x + q_2(x) \sin \beta x$$ con q_1 e q_2 polinomi di grado al più n

4) Se $g(x) = e^{\alpha x} \cos(\beta x)\, p(x)$ con p polinomio di grado n, allora

$$\bar{y}(x) = \begin{cases} q_1(x) e^{\alpha x} \cos(\beta x) + q_2(x) e^{\alpha x} \sin(\beta x) & \text{se } \beta \neq 0 \text{ o } \alpha \neq a \\ x\, q_1(x)\, e^{\alpha x} & \text{se } \alpha = a,\ \beta = 0 \end{cases}$$

(questo caso rientra nel 2))

dove q_1 e q_2 sono polinomi di grado al più n.

ESEMPIO

Risolvere $y' = 2y + \cos 2x$

Eq. lineare di I ordine completa $a(x) = 2$
$g(x) = \cos 2x$

1) Risolviamo $y' = 2y$.

$a(x) = 2 \qquad \int a(x)\, dx = 2x + c$

$A(x) = 2x$

La soluzione generale dell'eq. omogenea è

$y_0(x) = K e^{2x}$

2) Cerchiamo una sol. particolare $\bar{y}$ dell'eq. completa.

$g(x) = \cos 2x$ quindi (metodo di similarità)

$\bar{y}(x) = A \cos 2x + B \sin 2x$

$\bar{y}'(x) = -2A \sin 2x + 2B \cos 2x$

Sostituiamo nell'equazione $y' = 2y + \cos 2x$

$$-2A\sin 2x + 2B\cos 2x = 2(A\cos 2x + B\sin 2x) + \cos 2x$$

$$0 = 2A\sin 2x - 2B\cos 2x + 2A\cos 2x + 2B\sin 2x + \cos 2x$$

$$0 = \cos 2x\,(-2B + 2A + 1) + \sin 2x\,(2A + 2B)$$

$$\begin{cases} -2B + 2A + 1 = 0 \\ 2A + 2B = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 4A + 1 = 0 \\ B = -A \end{cases} \implies \begin{cases} A = -\frac{1}{4} \\ B = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\bar{y}(x) = -\frac{1}{4}\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x$$

3) Conclusione. La soluzione generale dell'eq. completa è $y(x) = \bar{y}(x) + y_0(x)$

$$= -\frac{1}{4}\cos 2x + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + K e^{2x}$$

ESERCIZIO

Risolvere $y' + y = x e^{-x}$

$$y' = -y + x e^{-x}$$

Eq. lineare completa di I ordine con $a(x) = -1$ e $g(x) = x e^{-x}$. $\quad (y' = a(x)\cdot y + g(x))$

1) Risolvere $y' = -y$

$a(x) = -1$

$A(x) = -x$

Quindi $y_0(x) = K e^{-x}$ (sol. generale dell'eq. omogenea $y' = -y$)

2) Cerchiamo $\bar{y}(x)$ con il metodo di similarità

$g(x) = x e^{-x}$

$$\bar{y}(x) = (Ax + B)e^{-x}x = (Ax^2 + Bx)e^{-x}$$

$$\bar{y}'(x) = (2Ax + B)e^{-x} + (Ax^2 + Bx)e^{-x}(-1)$$

$$= (2Ax + B)e^{-x} - (Ax^2 + Bx)e^{-x}$$

Sostituiamo nell' equazione : $y' = -y + x e^{-x}$

$$(2Ax+B)\cancel{e^{-x}} - (Ax^2+Bx)\cancel{e^{-x}} = -(Ax^2+Bx)\cancel{e^{-x}} + x\cancel{e^{-x}}$$

$$2Ax + B - \cancel{Ax^2} - \cancel{Bx} = -\cancel{Ax^2} - \cancel{Bx} + x$$

$$2Ax + B = x$$

$$\begin{cases} 2A = 1 \\ B = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ B = 0 \end{cases}$$

$$\bar{y}(x) = \frac{1}{2} x^2 e^{-x}$$

3) Conclusione: la soluzione generale è:

$$\bar{y}(x) + y_0(x) = \frac{1}{2} x^2 e^{-x} + K e^{-x}$$

Equazioni lineari di II ordine a coefficienti costanti

Sono equazioni del tipo:

$a y'' + b y' + c y = g(x)$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$ e

$g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continua in I intervallo.

- L'equazione si dice OMOGENEA se $g(x) = 0 \ \forall x \in I$
- Si dice NON OMOGENEA o COMPLETA se se $g(x) \not\equiv 0$

Il metodo risolutivo è simile a quello per le equazioni lineari di I ordine

Caso omogeneo $a y'' + b y' + c y = 0$.

Def: Il polinomio $p(x) = a x^2 + b x + c$ si dice POLINOMIO CARATTERISTICO associato all' equazione.

L'equazione $p(x) = 0$ si dice EQUAZIONE CARATTERISTICA.

OSS 1

Se $\lambda \in \mathbb{R}$ è una radice del polinomio caratteristico ($p(\lambda) = 0$) allora $y(x) = e^{\lambda x}$ è una soluzione di $a y'' + b y' + c y = 0$.

DIM

$y(x) = e^{\lambda x}$, $y'(x) = e^{\lambda x} \lambda$, $y''(x) = e^{\lambda x} \lambda^2$

$$\begin{aligned} a y'' + b y' + c y &= a e^{\lambda x} \lambda^2 + b e^{\lambda x} \lambda + c e^{\lambda x} \\ &= e^{\lambda x} (a \lambda^2 + b \lambda + c) \\ &= e^{\lambda x} p(\lambda) \quad = 0 \quad (\text{se } p(\lambda) = 0). \end{aligned}$$

OSS 2 Se $p(x) = a(x - \lambda)^2$ allora $y(x) = e^{\lambda x}$ e $y(x) = e^{\lambda x} \cdot x$ sono soluzioni dell'equazione omogenea associata a p.

OSS 3 Se $p(x) = a x^2 + b x + c$ con $\Delta < 0$ e le radici complesse di $p(x)$ sono $\alpha \pm i\beta$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, allora $y(x) = e^{\alpha x} \cos \beta x$ e $y(x) = e^{\alpha x} \sin \beta x$ sono soluzioni dell'equazione omogenea $a y'' + b y' + c y = 0$.

PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE:

Se y_1 e y_2 sono soluzioni di $a y_1'' + b y_1' + c y_1 = g_1(x)$ e $a y_2'' + b y_2' + c y = g_2(x)$, allora $\forall\, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, la funzione $z = c_1 y_1 + c_2 y_2$ risolve

$$a z'' + b y' + c y = c_1 g_1(x) + c_2 g_2(x).$$

Nota: In particolare, quando $g_1 = g_2 = 0$ otteniamo che se y_1 e y_2 risolvono un'eq. lineare omogenea di II ordine allora $z = c_1 y_1 + c_2 y_2$ è una soluzione della stessa equazione.

TEOREMA

Siano $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Consideriamo l'eq. omogenea $a y'' + b y' + c y = 0$. Allora

1) Se $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, la soluzione generale è $y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$ dove λ_1 e λ_2 sono le due radici reali del polinomio caratteristico $p(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c$.

2) Se $\Delta = 0$, la soluzione generale è $y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_1 x} x$ dove λ_1 è l'unica radice reale di $p(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c$.

3) Se $\Delta < 0$ e $\alpha \pm i\beta$ sono le radici complesse del polinomio caratteristico, allora la soluzione generale è $y(x) = c_1 e^{\alpha x} \cos\beta x + c_2 e^{\alpha x} \sin \beta x$.

ESEMPI

1) $y'' + y' - 2y = 0$

$p(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 2 \qquad \Delta = 1 + 8 = 9 > 0$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$$

La soluzione generale è:

$$y(x) = c_1 e^{1 \cdot x} + c_2 e^{-2x} = c_1 e^{x} + c_2 e^{-2x}$$

2) $y'' - 6y' + 25y = 0$

$p(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 25 \qquad \Delta = 36 - 100 = -64$

$$\lambda_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{-64}}{2} = \frac{6 \pm 8i}{2} = \underbrace{3}_{\alpha} \pm \underbrace{4}_{\beta} i$$

La soluzione generale è

$$y(x) = c_1 e^{3x} \cos 4x + c_2 e^{3x} \sin 4x$$

3) $y'' + 2y' + y = 0$

$p(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda+1)^2$ $\qquad$ $\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = -1$

$\lambda = -1$ è l'unica radice

La sol. generale è $y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-x} \cdot x$

4) $y'' + 4y = 0$

$p(\lambda) = \lambda^2 + 4$

$\lambda^2 + 4 = 0$ $\qquad$ $\lambda^2 = -4$ $\qquad$ $\lambda = \pm 2i = \underbrace{0}_{\alpha} \pm \underbrace{2}_{\beta} i$

La soluzione generale è

$$y(x) = C_1 e^{0 \cdot x} \cos 2x + C_2 e^{0 \cdot x} \sin 2x$$
$$= C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x .$$

Caso non omogeneo $(a y'' + b y' + c y = g(x))$

TEOREMA Sia I un intervallo e siano $a, b, c \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$ e $g: I \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Se $\bar{y}(x)$ è una soluzione particolare dell'equazione completa $a y'' + b y' + c y = g(x)$, allora la soluzione generale è del tipo

$y(x) = \bar{y}(x) + y_0(x)$ dove $y_0(x)$ è la soluzione generale dell'equazione omogenea $a y'' + b y' + c y = 0$.

Ricapitolando: per risolvere $a y'' + b y' + c y = g(x)$.

1) Si trova $y_0(x)$ soluzione generale di $a y'' + b y' + c y = 0$
2) Si trova la sol. particolare $\bar{y}(x)$ con il metodo di similarità
3) La soluzione generale è $y(x) = \bar{y}(x) + y_0(x)$.

METODO DI SIMILARITÀ PER EQUAZIONI LINEARI DI II ORDINE

Consideriamo un'equazione $a y'' + b y' + c y = g(x)$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Sia $p(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c$. Allora:

1) Se $g(x)$ è un polinomio di grado $n \in \mathbb{N}$, allora $\exists$ una soluzione $\bar{y}(x)$ della forma

$$\bar{y}(x) = \begin{cases} q(x) & \text{se } p(0) \neq 0 \\ q(x) \cdot x & \text{se } 0 \text{ è una radice di } p \text{ di molteplicità } 1 \\ q(x) \cdot x^2 & \text{se } 0 \text{ è una radice di } p \text{ di molteplicità } 2 \end{cases}$$

dove q è un polinomio di grado al più n

2) Se $g(x) = e^{\alpha x} \cdot p_1(x)$ dove p_1 è un polinomio di grado n allora $\exists$ una soluzione $\bar{y}(x)$ della forma

$$\bar{y}(x) = \begin{cases} e^{\alpha x} q(x) & \text{se } p(\alpha) \neq 0 \\ e^{\alpha x} q(x)\, x & \text{se } \alpha \text{ è una radice di } p \text{ di molteplicità } 1 \\ e^{\alpha x} q(x)\, x^2 & \text{se } \alpha \text{ è una radice di } p \text{ di molteplicità } 2 \end{cases}$$

dove $q(x)$ è un polinomio di grado al più n.

3) Se $g(x) = \cos(\beta x) p_1(x)$ o $\sin(\beta x) p_1(x)$ dove p_1 è un polinomio di grado n allora $\exists$ una soluzione $\bar{y}(x)$ della forma

$$\bar{y}(x) = \begin{cases} \cos(\beta x) q_1(x) + \sin(\beta x) q_2(x) & \text{se } p(i\beta) \neq 0 \\ \cos(\beta x) q_1(x) x + \sin(\beta x) q_2(x) & \text{se } p(i\beta) = 0 \end{cases}$$

dove $q_1(x)$ e $q_2(x)$ sono polinomi di grado al più n

4) Se $g(x) = e^{\alpha x} \cos(\beta x) p_1(x)$ o $g(x) = e^{\alpha x} \sin(\beta x) p_1(x)$ con $\beta \neq 0$ e $p_1(x)$ polinomio di grado n

(oppure $q(x) = e^{\alpha x}\cos(\beta x)\, p_1(x) + e^{\alpha x} \operatorname{sen}(\beta x)\, p_2(x)$ con p_1 e p_2 polinomi e $\max\{\deg p_1, \deg p_2\} = n$)

allora $\exists$ una soluzione $\bar{y}(x)$ della forma:

$$\bar{y}(x) = \begin{cases} e^{\alpha x}\cos(\beta x) q_1(x) + e^{\alpha x} \operatorname{sen}(\beta x) q_2(x) & \text{se } p(\alpha + i\beta) \neq 0 \\ e^{\alpha x}\cos(\beta x) q_1(x)\, x + e^{\alpha x} \operatorname{sen}(\beta x) q_2(x)\, x & \text{se } p(\alpha + i\beta) = 0 \end{cases}$$

dove q_1 e q_2 sono polinomi di grado al più n.

ESEMPIO

$$y'' - y' = 3x + 1$$

Eq. lineare di secondo ordine non omogenea.

1) Risolvo $y'' - y' = 0$

$$p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda$$

$$\lambda^2 - \lambda = \lambda(\lambda - 1) \Rightarrow \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 1$$

$$y_0(x) = c_1 e^{0 \cdot x} + c_2 e^{1 \cdot x} = c_1 + c_2 e^x$$

2) Cerchiamo una sol. particolare $\bar{y}$

$$q(x) = 3x + 1$$

$$\bar{y}(x) = (Ax + B)\,x = Ax^2 + Bx$$

$$\bar{y}'(x) = 2Ax + B$$

$$\bar{y}''(x) = 2A$$

sostituiamo nell'equazione $y'' - y' = 3x + 1$

$$2A - (2Ax + B) = 3x + 1$$

$$2A - 2Ax - B = 3x + 1$$

$$-2Ax + 2A - B = 3x + 1$$

$$\begin{cases} -2A = 3 \\ 2A - B = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\frac{3}{2} \\ -3 - B = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\frac{3}{2} \\ B = -4 \end{cases}$$

$$\bar{y}(x) = -\frac{3}{2}x^2 - 4x$$

3) Conclusione: la sol. generale è

$$y(x) = -\frac{3}{2}x^2 - 4x + c_1 + c_2 e^x .$$

ESEMPIO 2

Determinare la soluzione generale dell'equazione

$$y'' - y' - 2y = \underbrace{2x - 3}_{g(x)} .$$

Equazione lineare di II ordine non omogenea

1) Risolvo $y'' - y' - 2y = 0$.

$$p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 2$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$$

La sol. generale dell'eq. omogenea è

$$y_0(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x}$$

2) Cerco una sol. particolare $\bar{y}(x)$.

$$g(x) = 2x - 3$$

$$\bar{y}(x) = Ax + B$$

$$\bar{y}'(x) = A$$

$$\bar{y}''(x) = 0$$

sostituisco nell'equazione $y'' - y' - 2y = 2x - 3$

$$0 - A - 2(Ax + B) = 2x - 3$$

$$-A - 2Ax - 2B = 2x - 3$$

$$-2Ax - A - 2B = 2x - 3$$

$$\begin{cases} -2A = 2 \\ -A - 2B = -3 \end{cases} \iff \begin{cases} A = -1 \\ 1 - 2B = -3 \end{cases} \longrightarrow \begin{aligned} 2B &= 1 + 3 \\ 2B &= 4 \\ B &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} A = -1 \\ B = 2 \end{cases}$$

$$\bar{y}(x) = -x + 2$$

3) Conclusione: la soluzione generale è

$$y(x) = -x + 2 + c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x}.$$

ESEMPIO 3

$$3y'' + y' + y = 5x e^{2x}$$

1) Risolvo $3y'' + y' + y = 0$

$$3\lambda^2 + \lambda + 1 = 0 \qquad \Delta = 1 - 12 = -11$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-11}}{6} = \frac{-1 \pm \sqrt{11}\, i}{6} = \underbrace{-\frac{1}{6}}_{\alpha} \pm \underbrace{\frac{\sqrt{11}}{6}}_{\beta} i$$

La sol. generale dell'eq. omogenea è

$$y_0(x) = c_1 e^{-\frac{1}{6}x} \cos\left(\frac{\sqrt{11}}{6}x\right) + c_2 e^{-\frac{1}{6}x} \sin\left(\frac{\sqrt{11}}{6}x\right)$$

2) Cerchiamo $\bar{y}(x)$

$$g(x) = 5x e^{2x}$$

$$\bar{y}(x) = (Ax + B) e^{2x}$$

$$\bar{y}'(x) = A e^{2x} + (Ax + B) e^{2x} \cdot 2$$
$$= e^{2x}(A + 2Ax + 2B)$$

$$\bar{y}''(x) = e^{2x} \cdot 2\,(A + 2Ax + 2B) + e^{2x}(2A)$$
$$= e^{2x}(2A + 4Ax + 4B + 2A)$$
$$= e^{2x}(4A + 4Ax + 4B)$$

Sostituiamo $3y'' + y' + y = 5x e^{2x}$

$$3\cancel{e^{2x}}(4A + 4Ax + 4B) + \cancel{e^{2x}}(A + 2Ax + 2B) + (Ax + B)\cancel{e^{2x}} = 5x\cancel{e^{2x}}$$

$$12A + 12Ax + 12B + A + 2Ax + 2B + Ax + B = 5x$$

$$15Ax + 13A + 15B = 5x$$

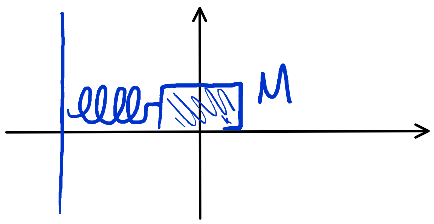
$$\begin{cases} 15A = 5 \\ 13A + 15B = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} A = \frac{1}{3} \\ B = -\frac{13}{15}A = -\frac{13}{45} \end{cases}$$

$$\bar{y}(x) = \left(\frac{1}{3}x - \frac{13}{45}\right) e^{2x}$$

3) Conclusione

$$y(x) = \left(\frac{1}{3}x - \frac{13}{45}\right) e^{2x} + C_1 e^{-\frac{1}{6}x} \cos\left(\frac{\sqrt{11}}{6}x\right) + C_2 e^{-\frac{1}{6}x} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{11}}{6}x\right)$$

ESEMPIO IN FISICA (moto armonico)



$x(t)$ posizione al tempo t

$F = -K\,x(t)$ (forza elastica)

$$M\,\ddot{x}(t) = -K\,x(t)$$

$$\ddot{x}(t) + \frac{K}{M}\,x(t) = 0$$

Se invece di $x(t)$ usiamo $y(x)$

$$\ddot{y} + \underbrace{\frac{K}{M}}_{>0}\,y = 0 \qquad \text{Se } \omega = \sqrt{\frac{K}{M}}$$

$$\ddot{y} + \omega^2 y = 0$$

$$p(\lambda) = \lambda^2 + \omega^2$$

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0 \qquad \lambda = \pm i\omega$$

$$y(x) = C_1 \cos(\omega x) + C_2 \sin(\omega x)$$

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2}$$

$$x_0 = \frac{C_2}{A} \qquad y_0 = \frac{C_1}{A} \qquad x_0^2 + y_0^2 = 1$$

$\exists\, \varphi \in \mathbb{R}$ t.c. $x_0 = \cos\varphi$ e $y_0 = \operatorname{sen}\varphi$

$$y(x) = A \operatorname{sen}\varphi \cos(\omega x) + A\cos\varphi \sin(\omega x)$$

$$= A \operatorname{sen}(\omega x + \varphi)$$

Cioè

$$x(t) = \underbrace{A}_{\text{ampiezza}} \sin(\underbrace{\omega}_{\text{frequenza}} t + \underbrace{\varphi}_{\text{fase iniziale}})$$