MATEMATICA - LEZIONE 38

lunedì 9 dicembre 2024 08:58

Equazioni differenziali ordinarie (EDO / ODE)

Sono equazioni in cui compaiono una funzione incognita $y(x)$ e alcune delle sue derivate.

Possono essere scritte come

$$F(x, \underbrace{y(x)}_{\text{Incognita da determinare}}, y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$$

ESEMPI

- $y'(x) = y''(x) + 4x\, y'''(x) - 3 + y(x)$.
  equazione di ordine 3 (compaiono derivate fino all'ordine 3)
- $y''(x) = \dfrac{x}{y(x)} + y'''(x)$ equazione di ordine 3.
- $y'' + y' = 0$ è un'equazione di ordine 2

Spesso si scrive y invece di $y(x)$.

$y''' + y'' + x = 0$ (vuol dire $y'''(x) + y''(x) + x = 0$)

EQUAZIONI IN FORMA NORMALE

Sono equazioni del tipo

$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ (è esplicitata la derivata di ordine più alto)

ESEMPIO

- $y'' + \frac{1}{x} y = 0$ non è in forma normale
- $y'' = -\frac{1}{x} y$ è in forma normale

Un'equazione differenziale ha infinite soluzioni

ESEMPIO

$y' = y$

- Una soluzione è $y(x) = e^x$.
- Una soluzione è $y(x) = 0$.
- Una soluzione è $y(x) = 2e^x$ (infatti $y'(x) = 2e^x = y(x)$)
- Vedremo che le soluzioni di $y'=y$ sono tutte del tipo $y(x) = c\,e^x$ con $c \in \mathbb{R}$.

È comune associare ad un'equazione delle condizioni iniziali.

$$\begin{cases} y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) & \text{(eq. in forma normale)} \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

n condizioni iniziali. (Tante quante l'ordine dell'eq.)

Un problema di questa forma si dice PROBLEMA DI CAUCHY e, sotto opportune ipotesi, ha un'unica soluzione

ESEMPIO

$$\begin{cases} y' = x^2 & \leftarrow \text{equazione} \\ y(0) = 2 & \leftarrow \text{condizione iniziale} \end{cases}$$

$y' = x^2$

$y(x) = \int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3 + c$

(queste sono le infinite soluzioni di $y' = x^2$)

Se imponiamo che $y(0) = 2$ troviamo c:

$y(x) = \frac{1}{3}x^3 + c$

$y(0) = c$ Vogliamo che $y(0) = 2$ quindi $c = 2$.

L'unica soluzione del problema di Cauchy

è $y(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2$

ESEMPIO

$$\begin{cases} y'' = x \\ y(1) = \frac{3}{2} \\ y'(1) = 0 \end{cases}$$

$y'' = x$

$y' = \int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 + c_1$

$y = \int\left(\frac{1}{2}x^2 + c_1\right)dx = \frac{1}{6}x^3 + c_1 x + c_2$

Determiniamo c_1 e c_2 usando le condizioni iniziali:

$y(x) = \frac{1}{6}x^3 + c_1 x + c_2$

$y'(x) = \frac{1}{2}x^2 + c_1$

$\Rightarrow$

$y(1) = \frac{1}{6} + c_1 + c_2$

$y'(1) = \frac{1}{2} + c_1$

Vogliamo che $y(1) = \frac{3}{2}$ e $y'(1) = 0$

$$\begin{cases} \frac{1}{6} + c_1 + c_2 = \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} + c_1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{1}{6} - \frac{1}{2} + c_2 = \frac{3}{2} \\ c_1 = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow c_2 = 2 - \frac{1}{6} = \frac{11}{6}$$

$$\begin{cases} c_2 = \frac{11}{6} \\ c_1 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Quindi l'unica sol. del problema di Cauchy è

$$y(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x + \frac{11}{6}.$$

Def L'insieme di tutte le soluzioni di un'eq. differenziale si dice SOLUZIONE GENERALE o INTEGRALE GENERALE dell'equazione differenziale

$$y'' = x \quad \Rightarrow \quad y(x) = \underbrace{\frac{1}{3}x^3 + c_1 x + c_2}_{\text{soluzione generale}}$$

Noi tratteremo:

1) Equazioni lineari di I ordine
$$y' = a(x)y + g(x)$$

2) Equazioni lineari di II ordine a coefficienti costanti
$$ay'' + by' + cy = g(x) \qquad \text{con } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

3) Equazioni a variabili separabili di I ordine
$$y' = a(y)\,b(x)$$

Equazioni lineari di I ordine

Sono equazioni del tipo:

$$y' = a(x)y + g(x) \qquad \text{con } a, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

e I intervallo. Assumeremo a, g continue in I.

- Se $g(x) = 0 \quad \forall x \in I$ l'equazione si dice OMOGENEA
- Se $g(x) \neq 0$ l'eq. si dice NON OMOGENEA o COMPLETA.

Caso omogeneo

$$y' = a(x)\, y$$

- Se $a(x) = 1$, $\quad y' = y \Rightarrow y(x) = c\, e^{x}$
- Se $a(x) = 2$, $\quad y' = 2y \Rightarrow y(x) = c\, e^{2x}$

TEOREMA

Sia I un intervallo e sia $a : I \to \mathbb{R}$ continua in I. Allora la soluzione generale dell'equazione $y' = a(x) y + g(x)$ è la funzione

$y(x) = K e^{A(x)}$ dove $A(x)$ è una primitiva di $a(x)$ in I e $K \in \mathbb{R}$.

DIM

Sia $y(x)$ una soluzione. Sia $z(x) = y(x)\, e^{-A(x)}$. Allora

$$z'(x) = y'(x)\, e^{-A(x)} + y(x)\, e^{-A(x)} (-A'(x))$$

$$= y'(x)\, e^{-A(x)} - y(x)\, e^{-A(x)} a(x)$$

$$= e^{-A(x)} \underbrace{(y'(x) - a(x)\, y)}_{=0} = 0$$

Quindi $\exists K \in \mathbb{R}$ t.c. $z(x) = K$ in I

cioè $\quad y(x)\, e^{-A(x)} = K \Rightarrow y(x) = K e^{A(x)}$.

ESEMPIO 1

$y' = x y \quad$ equazione lineare omogenea di I ordine $y' = a(x) y$ con $a(x) = x$.

$$\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 + c$$

Prendiamo $A(x) = \frac{1}{2}x^2$. La sol generale è

$y(x) = K e^{\frac{1}{2}x^2}$ con $K \in \mathbb{R}$

ESEMPIO 2

$y' = \sin(2x)\, y$

Eq. lineare omogenea di I ordine con

$a(x) = \sin(2x)$.

$$\int \sin(2x)\,dx = -\frac{\cos(2x)}{2} + C$$

$$y(x) = K e^{-\frac{\cos(2x)}{2}}$$

Nota

$\int \sin(2x)\,dx$

$y = 2x$

$dy = 2\,dx$

$dx = \frac{1}{2}\,dy$

$= \int \sin y \cdot \frac{1}{2}\,dy$

$= \frac{1}{2}\int \sin y\,dy = -\frac{1}{2}\cos y + C$

$= -\frac{1}{2}\cos(2x) + C$

ESEMPIO 3

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y}{(3x-1)^2} \\ y(0) = e \end{cases}$$

(Problema di Cauchy)

Risolviamo $y' = \dfrac{y}{(3x-1)^2}$

equazione lineare omogenea di I ordine con

$$a(x) = \frac{1}{(3x-1)^2}$$

$$\int \frac{1}{(3x-1)^2}\,dx = \int (3x-1)^{-2}\,dx = \frac{(3x-1)^{-1}}{-1} \cdot \frac{1}{3} + c$$

$$= -\frac{1}{3}\,\frac{1}{3x-1} + c \qquad \left(\int x^a\,dx = \frac{1}{1+a}\,x^{1+a} + c \right)$$

$$A(x) = -\frac{1}{3}\,\frac{1}{3x-1}$$

La sol. generale dell'eq. è $y(x) = K e^{-\frac{1}{3}\frac{1}{3x-1}}$

Condizione iniziale : $y(0) = e$

$$y(0) = K e^{-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{-1}\right)} = K e^{\frac{1}{3}}$$

Vogliamo $K e^{\frac{1}{3}} = e \quad \Rightarrow \quad K = \frac{e}{e^{\frac{1}{3}}} = e^{\frac{2}{3}}$

Soluzione del problema di Cauchy :

$$y(x) = e^{\frac{2}{3}}\, e^{-\frac{1}{3}\frac{1}{3x-1}} = e^{\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\frac{1}{3x-1}}$$

Equazioni lineari di I ordine non omogenee

$$y' = a(x)\, y + g(x)$$

PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE

Siano y_1 e y_2 soluzioni di $y_1' = a(x)\, y_1 + g_1(x)$ e $y_2' = a(x)\, y_2 + g_2(x)$. Se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ allora la funzione $z(x) = \alpha\, y_1(x) + \beta\, y_2(x)$ risolve $z' = a(x)\, z + \alpha\, g_1(x) + \beta\, g_2(x)$. In particolare $g_1 = g_2$ e $\alpha = 1$, $\beta = -1$, troviamo che $z = y_1 - y_2$ risolve l'eq. $z' = a(x)\, z$.

CONSEGUENZA

Se conosciamo una soluzione particolare $\bar{y}(x)$ di un'eq. lineare di I ordine completa $y' = a(x)y + g(x)$ allora la soluzione generale è del tipo
$y(x) = \bar{y}(x) + y_0(x)$ dove $y_0(x) = K e^{A(x)}$ con A primitiva di a (cioè y_0 è la sol. generale dell'eq. omogenea $y' = a(x)y$)

Riassumendo

L'eq. completa $y' = a(x)y + g(x)$ si risolve così:

1) Si considera l'equazione omogenea associata $y' = a(x)y$ e si trova la sol. generale $y_0(x)$ ($y_0(x) = K e^{A(x)}$ con $A'(x) = a(x)$)
2) Si trova una sol. particolare $\bar{y}$
3) La sol. generale dell'eq. completa è $y(x) = \bar{y}(x) + y_0(x)$

Per il punto 2) ci sono 2 metodi:

1) METODO DI VARIAZIONE DELLE COSTANTI
Si prende $\bar{y}(x) = K(x) e^{A(x)}$ con K funzione da determinare

2) METODO DI SIMILARITÀ cercare una soluzione particolare $\bar{y}(x)$ "simile" a $g(x)$.
(si può usare solo se $a(x) = a \in \mathbb{R}$ e se
$g(x) = p_1(x) e^{\alpha x} \cos(\beta x) + p_2(x) e^{\alpha x} \sin(\beta x)$)

ESEMPIO 1

$y' = 2y + e^{5x}$. eq. lineare di I ordine completa con $a(x) = 2$, $g(x) = e^{5x}$

1) Consideriamo l'eq. omogenea associata quella iniziale

$y' = 2y$.

$a(x) = 2 \;=\; \int 2\,dx = 2x + C$

Prendiamo $A(x) = 2x$

la sol. generale dell' eq. omogenea e'

$y_0(x) = K e^{2x}$.

2) Cerco una soluzione particolare $\bar{y}(x)$.

Utilizziamo il metodo di variazione delle costanti.

$\bar{y}(x) = K(x)\, e^{2x}$ dobbiamo cercare $K(x)$.

$\bar{y}'(x) = K'(x)\, e^{2x} + K(x)\, e^{2x} \cdot 2$

Vogliamo che $\bar{y}'(x) = 2\bar{y}(x) + e^{5x}$

$K'(x)\, e^{2x} + \cancel{2K(x)\, e^{2x}} = \cancel{2K(x)\, e^{2x}} + e^{5x}$

$K'(x)\, e^{2x} = e^{5x}$

$K'(x) = e^{3x}$

$K(x) = \int e^{3x}\,dx = \dfrac{e^{3x}}{3} + C$

Si può scegliere $C = 0$

$K(x) = \dfrac{e^{3x}}{3}$

$\bar{y}(x) = K(x)\, e^{2x} = \frac{1}{3} e^{3x} \cdot e^{2x} = \frac{1}{3} e^{5x}$.

3) Conclusione: la sol. generale dell'eq. completa è $y(x) = \bar{y}(x) + y_0(x) = \frac{1}{3} e^{5x} + K e^{2x}$.

Nota: metodo alternativo per il punto 2).

Possiamo usare il metodo di similarità.

Siccome $g(x) = e^{5x}$, prendiamo $\bar{y}(x) = A e^{5x}$

$y'(x) = 5A e^{5x}$

Vogliamo che $\bar{y}' = 2\bar{y} + e^{5x}$ quindi

$5Ae^{5x} = 2Ae^{5x} + e^{5x}$

$5A = 2A + 1$

$3A = 1$

$A = \frac{1}{3} \implies \bar{y}(x) = \frac{1}{3} e^{5x}$

METODO DI SIMILARITÀ PER TROVARE $\bar{y}$.

Data un'eq. completa $y' = \underbrace{a}_{\text{costante.}} y + g(x)$

1) Se $g(x)$ è un polinomio e $a \neq 0$ si può prendere $\bar{y}$ come un polinomio di grado $\leq \deg g$.

2) Se $g(x) = e^{\alpha x}$ si cerca $\bar{y}$ come

$$y(x) = \begin{cases} A e^{\alpha x} & \text{se } \alpha = a. \\ A x e^{\alpha x} & \text{se } \alpha = a \end{cases}$$

3) Se $g(x) = \sin(\beta x)$ o $g(x) = \cos(\beta x)$ con $\beta \neq 0$.

In questo caso

$\bar{y}(x) = A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x)$.

4) Se $g(x) = p(x) e^{\alpha x} \sin(\beta x)$ o $p(x) e^{\alpha x} \cos(\beta x)$
Allora se $\alpha \neq a$ o $\beta = 0$ si cerca
$\bar{y}(x) = q_1(x) e^{\alpha x} \cos(\beta x) + q_2 e^{\alpha x} \sin(\beta x)$ dove
q_1 e q_2 sono polinomi di grado $\leq \deg p$.

ESEMPIO

$$y' = \frac{y}{x} + x^2 \qquad \text{con } x \in (0, +\infty).$$

Eq. lineare completa di I ordine.

1) Considero l'eq. omogenea associata

$$y' = \frac{y}{x}$$

$$a(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow \int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x| + c = \ln x + c$$
(perché $x > 0$)

Scelgo $A(x) = \ln x$. La sol. generale dell'eq. omogenea è

$$y_0(x) = K e^{A(x)} = K e^{\ln x} = K x$$

2) Cerco $\bar{y}(x)$.

Posso usare solo il metodo di variazione delle costanti (a(x) non è costante).

$\bar{y}(x) = K(x)\, x$ Vogliamo $\bar{y}'(x) = \frac{\bar{y}(x)}{x} + x^2$

$\bar{y}'(x) = K'(x) \cdot x + K(x)$ quindi

$$K'(x) \cdot x + \cancel{K(x)} = \frac{\cancel{K(x)} \cdot \cancel{x}}{\cancel{x}} + x^2$$

$$K'(x) \cdot x = x^2$$

$$K'(x) = x$$

$$K(x) = \int x\, dx = \frac{1}{2} x^2 + c$$

Posso scegliere $K(x) = \frac{1}{2}x^2$.

cioè $\bar{y}(x) = \frac{1}{2}x^2 \cdot x = \frac{1}{2}x^3$.

3) Conclusione: la soluzione generale dell'eq. completa è $y(x) = \bar{y}(x) + y_0(x)$

$$= \frac{1}{2}x^3 + Kx.$$

ESEMPIO

$y' = 2y + 3x$

Eq. lineare completa di I ordine $(a(x)=2,\ g(x)=3x)$

1) Consideriamo $y' = 2y$.

$a(x) = 2 \qquad A(x) = 2x$

$y_0(x) = K e^{A(x)} = K e^{2x}$.

2) Cerco $\bar{y}$

Possiamo usare entrambi i metodi:

- Variazione delle costanti:

$\bar{y}(x) = K(x) e^{2x}$

$\bar{y}'(x) = K'(x) e^{2x} + K(x) e^{2x} \cdot 2$

Vogliamo che $\bar{y}'(x) = 2\bar{y}(x) + 3x$

$$K'(x) e^{2x} + \cancel{K(x) e^{2x} \cdot 2} = \cancel{2K(x)e^{2x}} + 3x$$

$K'(x) e^{2x} = 3x$

$K'(x) = 3x e^{-2x}$

$K(x) = \int 3x \underbrace{e^{-2x}}_{f'} dx$ Integriamo per parti:

$$= -\frac{1}{2}e^{-2x}\cdot 3x - \int\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)\cdot 3\,dx$$

$$= -\frac{3}{2}e^{-2x}x + \frac{3}{2}\int e^{-2x}dx$$

$$= -\frac{3}{2}e^{-2x}x + \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)e^{-2x} + c$$

$$= -\frac{3}{2}e^{-2x}\cdot x - \frac{3}{4}e^{-2x} + c$$

$$\bar{y}(x) = \left(-\frac{3}{2}e^{-2x}x - \frac{3}{4}e^{-2x}\right)e^{2x}$$

$$= -\frac{3}{2}x - \frac{3}{4}$$

- Similarità: $\bar{y}' = 2\bar{y} + 3x$

$g(x) = 3x$ polinomio di I grado

$\bar{y}(x) = Ax + B$ ($\bar{y}$ è un polinomi di grado ≤ 1)

$\bar{y}'(x) = A$

sostituendo

$$A = 2(Ax + B) + 3x$$

$$A = 2Ax + 2B + 3x$$

$$0 = 2Ax + 3x + 2B - A$$

$$0 = x(2A + 3) + 2B - A$$

$$\begin{cases} 2A + 3 = 0 \\ 2B - A = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\frac{3}{2} \\ B = \frac{A}{2} = -\frac{3}{4} \end{cases}$$

$$\bar{y}(x) = Ax + B = -\frac{3}{2}x - \frac{3}{4}$$

3) Conclusione: la sol. generale è la somma

$$y(x) = \bar{y}(x) + y_0(x) = -\frac{3}{2}x - \frac{3}{4} + K e^{2x}.$$