ESERCIZIO Calcolare l'integrale definito

$$\int_{-\ln 2}^{0} \frac{1}{e^{2x}-4}\,dx$$

Calcoliamo prima $\int \frac{1}{e^{2x}-4}\,dx$

Sostituzione

$$y = e^{2x}$$
$$dy = e^{2x}\cdot 2\,dx$$
$$dx = \frac{dy}{e^{2x}\cdot 2} = \frac{dy}{2y}$$

Quindi

$$\int \frac{1}{e^{2x}-4}\,dx = \int \frac{1}{y-4}\,\frac{dy}{2y} = \int \frac{1}{2y(y-4)}\,dy$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{y(y-4)}\,dy$$

Cerchiamo A, B t.c.

$$\frac{1}{y(y-4)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{y-4}$$
$$= \frac{A(y-4)+By}{y(y-4)} = \frac{Ay-4A+By}{y(y-4)} = \frac{(A+B)y-4A}{y(y-4)}$$

Moltiplicando per $y(y-4)$ troviamo

$$1 = (A+B)y - 4A$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -4A=1 \end{cases}$$

$$\boxed{0\cdot y + 1 = \underline{(A+B)}y - \underline{4A}}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} B = \frac{1}{4} \\ A = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

Quindi:

$$\int \frac{1}{y(y-4)}\,dy$$

$$= \int -\frac{1}{4}\frac{1}{y} + \frac{1}{4}\frac{1}{y-4}\,dy$$

$$= -\frac{1}{4}\ln|y| + \frac{1}{4}\ln|y-4| + c$$

$$= -\frac{1}{4}\ln|e^{2x}| + \frac{1}{4}\ln|e^{2x}-4| + C$$

$$= -\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\ln|e^{2x}-4| + c$$

Il risultato è questo ma può essere scritto anche in modi diversi

$$= -\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\ln\left(|e^{2x}|\cdot\left|1-\frac{4}{e^{2x}}\right|\right) + c$$

$$= \cancel{-\frac{1}{2}x} + \cancel{\frac{1}{4}\cdot 2x} + \frac{1}{4}\ln\left|1-\frac{4}{e^{2x}}\right| + c$$

In conclusione:

$$\int \frac{1}{e^{2x}-4}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{y(y-4)}\,dy = \frac{1}{8}\ln\left|1-\frac{4}{e^{2x}}\right| + c$$

Risultato finale

$$\int_{-\ln 2}^{0} \frac{1}{e^{2x}-4}\,dx = \frac{1}{8}\ln\left|1-\frac{4}{e^{2x}}\right|\Bigg|_{-\ln 2}^{0}$$

$$= \frac{1}{8}\ln|-3| - \frac{1}{8}\ln|1-4e^{2\ln 2}|$$

$$= \frac{1}{8}\ln 3 - \frac{1}{8}\ln 15$$

$$= \frac{1}{8}\ln\frac{1}{5}$$

Nota: la sostituzione si poteva fare direttamente nell'integrale definito trasformando gli estremi

$y = e^{2x}$:
$x = 0 \Rightarrow y = 1$
$x = -\ln 2 \Rightarrow y = \frac{1}{4}$

$$\int_{-\ln 2}^{0} \frac{1}{e^{2x} - 4}\, dx = \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{4}}^{1} \frac{1}{y(y-4)}\, dy = \frac{1}{8} \ln\left|1 - \frac{4}{y}\right| \Bigg|_{\frac{1}{4}}^{1} = \frac{1}{8}\ln 3 - \frac{1}{8}\ln 15$$
$$= \frac{1}{8}\ln 5$$

ESERCIZIO

$$\int \underbrace{x}_{f'} \ln(2+3x)\, dx$$

Integriamo per parti

$$= \frac{1}{2}x^2 \ln(2+3x) - \int \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{2+3x} \cdot 3\, dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \ln(2+3x) - \frac{3}{2}\int \underbrace{\frac{x^2}{3x+2}}\, dx$$

Divisione tra polinomi

$$\begin{array}{l|l} x^2 & 3x+2 \\ \hline x^2 + \frac{2}{3}x & \frac{x}{3} - \frac{2}{9} \\ \hline // \quad -\frac{2}{3}x & \\ -\frac{2}{3}x - \frac{4}{9} & \\ \hline // \quad \frac{4}{9} & \end{array}$$

Concludiamo che:

$$\frac{x^2}{3x+2} = \frac{x}{3} - \frac{2}{9} + \frac{\frac{4}{9}}{3x+2}.$$ Pertanto

$$-\frac{3}{2}\int \frac{x^2}{3x+2}\, dx = -\frac{3}{2}\int \left(\frac{x}{3} - \frac{2}{9} + \frac{\frac{4}{9}}{3x+2}\right) dx$$

$$= -\frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\int x\, dx - \frac{2}{9}\int 1\, dx + \frac{4}{9}\int \frac{1}{3x+2}\, dx\right)$$

$$= -\frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\frac{x^2}{2} - \frac{2}{9}x + \frac{4}{9}\ln|3x+2| \cdot \frac{1}{3}\right) + C$$

$$= -\frac{1}{4}x^2 + \frac{x}{3} - \frac{2}{9}\ln|3x+2| + c$$

Risultato finale:

$$\frac{1}{2}x^2\ln(3x+2) - \frac{1}{4}x^2 + \frac{x}{3} - \frac{2}{9}\ln|3x+2| + c$$

Ricordare:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + c$$

$$\int \frac{1}{3x+2}\,dx = \frac{1}{3}\cdot\int\frac{3}{3x+2}\,dx = \frac{1}{3}\ln|3x+2| + c$$

$$\int \frac{1}{ax+b}\,dx = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + c$$

ESERCIZIO 3

$$\int \frac{1}{2e^x + e^{-x} + 1}\,dx$$

$$= \int \frac{1}{2e^x + \frac{1}{e^x} + 1}\,dx$$

Ricordare

$$\frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a}$$

$$= \int \frac{1}{\frac{2e^{2x} + 1 + e^x}{e^x}}\,dx = \int \frac{e^x}{2e^{2x} + e^x + 1}\,dx$$

$$y = e^x$$
$$dy = e^x\,dx$$

$$= \int \frac{dy}{2y^2 + y + 1} = \int \frac{1}{2y^2+y+1}\,dy$$

$$\Delta = 1 - 8 = -7 < 0$$

Cerchiamo le radici complesse

$$y_{1,2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{-7}}{4} = -\frac{1}{4} \pm i\frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$\boxed{\sqrt{-7} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{7} = i\sqrt{7}}$$

Quindi

$$2y^2+y+1 = 2\left(\left(y+\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{7}{16}\right) = 2\cdot\frac{7}{16}\left(\left(\frac{y+\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{7}}{4}}\right)^2+1\right)$$

$$= \frac{7}{8}\left(\left(\frac{4y+1}{\sqrt{7}}\right)^2+1\right)$$

In generale dato un polinomio ay^2+by+c con $\Delta<0$ se le radici complesse sono $y_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ si può scrivere:

$$ay^2+by+c = a\left((y-\alpha)^2+\beta^2\right) = a\beta^2\left(\left(\frac{y-\alpha}{\beta}\right)^2+1\right)$$

Quindi si ha che

$$\int \frac{1}{2y^2+y+1}\,dy = \int \frac{1}{\frac{7}{8}\left(\left(\frac{4y+1}{\sqrt{7}}\right)^2+1\right)}\,dy$$

$$= \frac{8}{7}\int \frac{1}{\left(\frac{4y+1}{\sqrt{7}}\right)^2+1}\,dy$$

$$= \frac{8}{7}\cdot\frac{\sqrt{7}}{4}\int \frac{\frac{4}{\sqrt{7}}}{\left(\frac{4y+1}{\sqrt{7}}\right)^2+1}\,dy$$

$$= \frac{8}{7}\,\frac{\sqrt{7}}{4}\arctan\left(\frac{4y+1}{\sqrt{7}}\right)+C$$

$$= \frac{2}{\sqrt{7}}\arctan\left(\frac{4e^x+1}{\sqrt{7}}\right)+C$$

Nota: In questo caso il numeratore era costante, se avessimo avuto un polinomio di grado 1 ($ax+b$ con $a\neq 0$) avremmo dovuto trovare una decomposizione del tipo

$$ax+b = A\underbrace{(2y+1)}_{\text{derivata del denominatore}} + B$$

derivata del denominatore.

- $$\int \frac{y}{y^2+1}\,dy = \frac{1}{2}\int \frac{2y}{y^2+1}\,dy = \frac{1}{2}\ln(y^2+1) + C$$

- $$\int \frac{3y-2}{\underbrace{y^2+y+1}_{\Delta = 1-4=-3<0}}\,dy$$

$$3y-2 = A(2y+1) + B$$

$$3y-2 = 2Ay + A + B$$

$$\begin{cases} 2A = 3 \\ A+B = -2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A = \frac{3}{2} \\ B = -2-\frac{3}{2} = -\frac{7}{2} \end{cases}$$

$$\int \frac{3y-2}{y^2+y+1}\,dy = \frac{3}{2}\int \frac{2y+1}{y^2+y+1}\,dy - \frac{7}{2}\int \frac{1}{y^2+y+1}\,dy$$

$$= \frac{3}{2}\ln(y^2+y+1) - \frac{7}{2}\int \frac{1}{y^2+y+1}\,dy \quad (*)$$

Radici del denominatore $y_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$y^2+y+1 = \left(y+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}\left(\left(\frac{y+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2+1\right)$$

$$= \frac{3}{4}\left(\left(\frac{2y+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right)$$

Quindi: $\displaystyle\int \frac{3y-7}{y^2+y+1}\,dy =$

(*) $\displaystyle = \frac{3}{2}\ln(y^2+y+1) - \frac{7}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{4}^{\,2}}{3} \cdot \int \frac{1}{\left(\frac{2y+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\,dy$

$$= \frac{3}{2}\ln(y^2+y+1) - \frac{14}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\int \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\left(\frac{2y+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\,dy$$

$$= \frac{3}{2}\ln(y^2+y+1) - \frac{7}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2y+1}{\sqrt{3}}\right) + c$$

Integrali generalizzati

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = ?$$

Abbiamo definito gli integrali solo quando l'intervallo di integrazione è chiuso e limitato

Idea: si fissa $\beta \in \mathbb{R}, \beta > 0$. Si calcola $\int_0^\beta \frac{1}{1+x^2}\,dx$ e si fa il limite per $\beta \to +\infty$

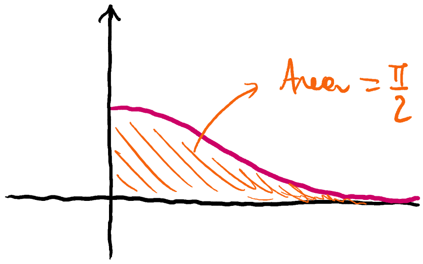
$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{\beta\to+\infty}\int_0^\beta \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{\beta\to+\infty} \arctan x\Big|_0^\beta$$

$$= \lim_{\beta\to+\infty} \arctan\beta - 0$$

$$= \lim_{\beta\to+\infty}\arctan\beta = \frac{\pi}{2}$$

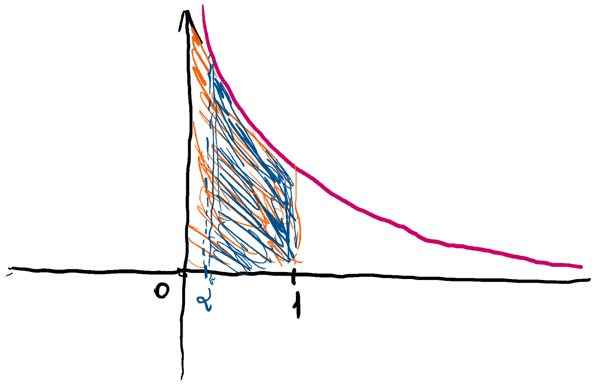
Quindi possiamo dire che

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx = \frac{\pi}{2}$$



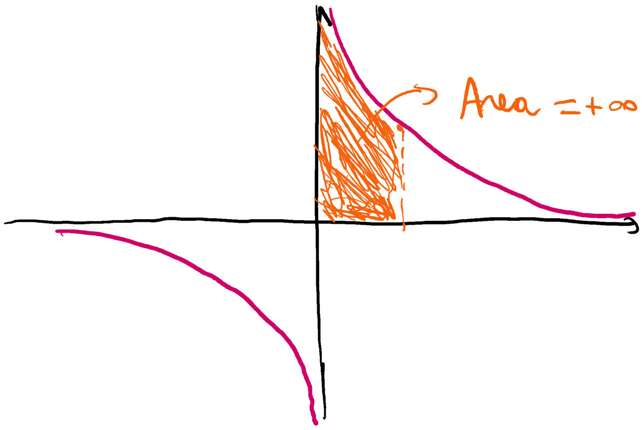
Un procedimento simile si può utilizzare per definire gli integrali di funzioni non limitate (ad esempio, quelle che hanno un asintoto verticale

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\, dx = \lim_{\alpha \to 0^+} \int_\alpha^1 \frac{1}{x}\, dx$$



$$= \lim_{\alpha \to 0^+} \ln x \Big|_\alpha^1 =$$

$$= \lim_{\alpha \to 0^+} 0 - \ln \alpha = \lim_{\alpha \to 0^+} -\ln \alpha = -(-\infty) = +\infty$$



Invece:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = \lim_{\alpha \to 0^+} \int_\alpha^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$$

$$= \lim_{\alpha \to 0^+} \int_\alpha^1 x^{-\frac{1}{2}}\, dx$$

Ricordare

$$\int x^a dx = \frac{1}{1+a} x^{1+a} + C$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} \Big|_{\varepsilon}^{1} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} 2\sqrt{x} \Big|_{\varepsilon}^{1}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} 2 - 2\sqrt{\varepsilon} = 2$$

Notazione:

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = F(x) \Big|_0^{+\infty} = \lim_{\beta \to +\infty} F(\beta) - F(0)$$

Def Siano $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ e sia $f : [a, b) \to \mathbb{R}$. Supponiamo $a < b$. Si dice che f è INTEGRABILE IN SENSO GENERALIZZATO IN $[a, b)$ se

1) $\forall \beta \in (a, b)$, f è integrabile in $[a, \beta]$

2) $\exists \lim_{\beta \to b^-} \int_a^\beta f(x)\,dx$.

(se $b = +\infty$ è un limite per $\beta \to +\infty$)

In tal caso il limite si indica con $\int_a^b f(x)\,dx$

Def Siano $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ e $b \in \mathbb{R}$ e sia $f : (a, b] \to \mathbb{R}$. Supponiamo $a < b$. Si dice che f è INTEGRABILE IN SENSO GENERALIZZATO IN $(a, b]$ se

1) $\forall \beta \in (a, b)$, f è integrabile in $[\varepsilon, b]$

2) $\exists \lim_{\varepsilon \to a^+} \int_{a^+}^b f(x)\,dx$.

In tal caso il limite si indica con $\int_a^b f(x)\,dx$

Nota:

Se $f:(a,b)\longrightarrow \mathbb{R}$ (intervallo aperto in entrambi gli estremi) è integrabile in $[\alpha,\beta]$ $\forall\, \alpha,\beta\in(a,b)$ con $\alpha<\beta$ si dice che f è INTEGRABILE IN SENSO GENERALIZZATO in (a,b) se $\forall\, c\in(a,b)$, f è integrabile in senso generalizzato in $(a,c]$ e in $[c,b)$.

Il simbolo $\int_a^b f(x)\,dx$ è usato anche quando f non è integrabile in senso generalizzato:

Quando $f:[a,b)\longrightarrow \mathbb{R}$:

- $\int_a^b f(x)\,dx$ si dice CONVERGENTE se f è integrabile in senso generalizzato.
- $\int_a^b f(x)\,dx$ si dice DIVERGENTE a $+\infty$ (o a $-\infty$) se $\lim_{\beta\to b^-}\int_a^\beta f(x)\,dx = +\infty$ (o $-\infty$)
- $\int_a^b f(x)\,dx$ non esiste se $\nexists \lim_{\beta\to b^-}\int_a^\beta f(x)\,dx$

ESEMPI

1) $\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}$ è convergente. Infatti abbiamo visto che

$$\lim_{\beta\to+\infty}\int_0^\beta \frac{1}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$$

2) $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}\,dx$ è divergente a $+\infty$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = \ln x \Big|_1^{+\infty} = \lim_{\beta\to+\infty} \ln x \Big|_1^{\beta}$$

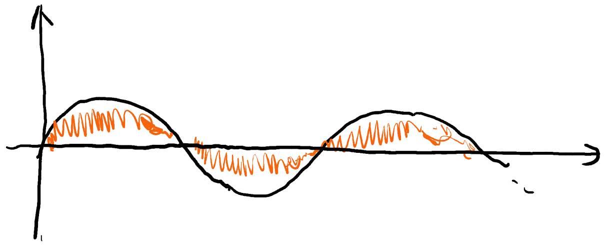
$$= \lim_{\beta\to+\infty} \ln\beta - \underbrace{\ln 1}_{=0} = +$$

$$= \lim_{\beta\to+\infty} \ln\beta = +\infty$$

3) $\int_0^{+\infty} \sin x\,dx \quad \nexists \quad$ Infatti:

$$\int_0^{+\infty} \sin x\,dx = -\cos x \Big|_0^{+\infty} = \lim_{\beta\to+\infty} -\cos x \Big|_0^{\beta}$$

$$= \lim_{\beta\to+\infty} -\cos x + 1 \quad \nexists$$



4) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha}}\,dx$ è convergente se $\alpha > 1$

è divergente se $\alpha \leq 1$

Ad esempio

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ è convergente $(2 > 1)$. Possiamo calcolarlo

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \int_1^{+\infty} x^{-2}\,dx = \frac{x^{-1}}{-1} \Big|_1^{+\infty}$$

$$= -\frac{1}{x}\Big|_1^{+\infty} = \lim_{\beta\to+\infty} -\frac{1}{\beta} + 1 = 1$$

5) $\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx$

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = -e^{-x}\Big|_0^{+\infty} = \lim_{\beta\to+\infty} -e^{-\beta}+1$$

$$= \lim_{\beta\to+\infty} 1 - \underbrace{e^{-\beta}}_{\to 0} = 1$$

L'integrale è convergente

In alcuni casi si può stabilire se un integrale è convergente anche senza calcolarlo

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{x}}{1+x^4}\,dx$$

$$\frac{\sqrt[3]{x}}{1+x^4} \sim \frac{\sqrt[3]{x}}{x^4} = \frac{1}{x^{4-\frac{1}{3}}} = \frac{1}{x^{\frac{11}{3}}}$$

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{11}{3}}}\,dx$ è convergente perché $\frac{11}{3} > 1$

TEOREMA (CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO PER GLI INTEGRALI GENERALIZZATI)

Siano $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ con $a < b$. Siano $f, g : [a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ integrabili in $[a, \beta]$ $\forall \beta \in (a, b)$ tali che $f(x) \geq 0$ e $g(x) > 0$ $\forall x \in [a, b)$. Se

$$\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = l \in (0, +\infty) \text{ allora}$$

$\int_a^b f(x)\,dx$ e $\int_a^b g(x)\,dx$ hanno lo stesso carattere.

Consideriamo ad esempio

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{1+x^4} \quad e \quad g(x) = \frac{1}{x^{\frac{11}{3}}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{x}}{1+x^4} \cdot x^{\frac{11}{3}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{11}{3}}}{1+x^4} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4}{1+x^4} = 1 \in (0,+\infty)$$

Siccome $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{11}{3}}}\,dx$ è convergente possiamo dire

che anche $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{x}}{1+x^4}\,dx$ è convergente.

$$\int_1^{+\infty} e^{-x^2}\,dx \qquad ?$$

TEOREMA (CRITERIO DEL CONFRONTO PER GLI INTEGRALI GENERALIZZATI)

Siano $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ con $a < b$. Siano $f, g : [a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ tali che f e g sono integrabili in $[a, \beta)$ $\forall\, \beta \in (a, b)$.

Supponiamo che $0 \le f(x) \le g(x)$ $\forall x \in (a, b)$

Allora:

1) Se $\int_a^b g(x)\,dx$ è convergente, anche $\int_a^b f(x)\,dx$ è convergente.

2) Se $\int_a^b f(x)\,dx$ è divergente, anche $\int_a^b g(x)\,dx$ è divergente.

ESEMPIO

Se $x \geq 1$, allora $x^2 \geq x \Rightarrow -x^2 \leq -x$

$\Rightarrow e^{-x^2} \leq e^{-x}$

Quindi $0 \leq e^{-x} \leq e^{-x^2}$

Siccome $\int_1^{+\infty} e^{-x}\, dx$ è convergente $\left(\int_1^{+\infty} e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_0^{+\infty} = \lim_{p \to +\infty} -e^{-p} + 1 = 1 \right)$

anche $\int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx$ è convergente