

Esempio (denominatore II grado con $\Delta < 0$)

$$\int \frac{x}{9x^2 + 12x + 20} dx$$

$$\frac{\Delta}{4} = \frac{6^2 - 9 \cdot 20}{4} = \frac{36 - 180}{4} = -144 < 0$$

le radici complesse e coniugate del denominatore sono

$$z_{1,2} = \frac{-6 \pm 12i}{9} = -\frac{2}{3} \pm \frac{4}{3}i$$

$$\begin{aligned} 9x^2 + 12x + 20 &= 9 \left(x + \frac{2}{3} - \frac{4}{3}i \right) \left(x + \frac{2}{3} + \frac{4}{3}i \right) \\ &= 9 \left(\left(x + \frac{2}{3} \right)^2 + \frac{16}{9} \right) = 9 \left(x + \frac{2}{3} \right)^2 + 16 \\ &= (3x+2)^2 + 16 = 16 \left(\frac{(3x+2)^2}{16} + 1 \right) \\ &= 16 \left(\left(\frac{3x+2}{4} \right)^2 + 1 \right) \end{aligned}$$

Determiniamo $A, B \in \mathbb{R}$ tali da

$$\frac{x}{9x^2 + 12x + 20} = \frac{A(18x+12) + B}{9x^2 + 12x + 20} = \frac{18Ax + 12A + B}{9x^2 + 12x + 20}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 18A = 1 \\ 12A + B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{18} \\ B = -12A = -\frac{12}{18} = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{9x^2 + 12x + 20} dx &= \int \left(\frac{1}{18} \cdot \frac{18x+12}{9x^2 + 12x + 20} - \frac{2}{3} \frac{1}{9x^2 + 12x + 20} \right) dx \\ &= \frac{1}{18} \int \frac{18x+12}{9x^2 + 12x + 20} dx - \frac{2}{3} \int \frac{1}{16 \left(\left(\frac{3x+2}{4} \right)^2 + 1 \right)} dx \\ &= \frac{1}{18} \log(9x^2 + 12x + 20) - \frac{1}{24} \int \frac{1}{\left(\frac{3x+2}{4} \right)^2 + 1} dx \\ &= \frac{1}{18} \log(9x^2 + 12x + 20) - \frac{1}{24} \cdot \frac{4}{3} \int \frac{\frac{3}{4}}{\left(\frac{3x+2}{4} \right)^2 + 1} dx \\ &= \frac{1}{18} \log(9x^2 + 12x + 20) - \frac{1}{18} \arctan\left(\frac{3x+2}{4}\right) + C \end{aligned}$$

Esercizi modulo esame

- 1) a) Calcolare l'integrale indefinito $\int \frac{3x-2}{4x^2-1} dx$
b) Calcolare l'integrale $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin x (3 \cos x - 2)}{4 \cos^2 x - 1} dx$

[7/9/22]

Svolgimento: a) Il denominatore ammette due radici reali e distinte $4x^2-1=0 \Leftrightarrow x^2=\frac{1}{4} \Leftrightarrow x=\pm\frac{1}{2}$

$$4x^2-1 = 4(x-\frac{1}{2})(x+\frac{1}{2}) = (2x-1)(2x+1)$$

Applichiamo la decomposizione in frazioni semplici, cioè determiniamo $A, B \in \mathbb{R}$ tali che

$$\begin{aligned} \frac{3x-2}{4x^2-1} &= \frac{A}{2x-1} + \frac{B}{2x+1} = \frac{A(2x+1)+B(2x-1)}{(2x-1)(2x+1)} \\ &= \frac{(2A+2B)x + A-B}{4x^2-1} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 3x-2 = (2A+2B)x + A-B$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2A+2B=3 \\ A-B=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A+B=\frac{3}{2} \\ A-B=-2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2A=-\frac{1}{2} \\ B=A+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-\frac{1}{4} \\ B=\frac{7}{4} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{3x-2}{4x^2-1} dx &= \int \left(-\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2x-1} + \frac{7}{4} \cdot \frac{1}{2x+1} \right) dx \\ &= -\frac{1}{8} \int \frac{2}{2x-1} dx + \frac{7}{8} \int \frac{2}{2x+1} dx \\ &= -\frac{1}{8} \log|2x-1| + \frac{7}{8} \log|2x+1| + C \end{aligned}$$

$$b) \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin x (3 \cos x - 2)}{4 \cos^2 x - 1} dx$$

consideriamo la sostituzione $t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx$

$$x=0 \Rightarrow t = \cos 0 = 1$$

$$x=\frac{\pi}{6} \Rightarrow t = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin x (3 \cos x - 2)}{4 \cos^2 x - 1} dx = \int_1^{\frac{\sqrt{3}}{2}} - \frac{3t-2}{4t^2-1} dt$$

$$= \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^1 \frac{3t-2}{4t^2-1} dt = \left[-\frac{1}{8} \log |2t-1| + \frac{7}{8} \log |2t+1| \right]_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^1$$

teorema di
Tornicelli

$$= -\frac{1}{8} \log 1 + \frac{7}{8} \log 3 - \left(-\frac{1}{8} \log(\sqrt{3}-1) + \frac{7}{8} \log(\sqrt{3}+1) \right)$$

$$= \frac{7}{8} \log 3 + \frac{1}{8} \log(\sqrt{3}-1) - \frac{7}{8} \log(\sqrt{3}+1)$$

2) a) Calcolare l'integrale improprio $\int \frac{2x+1}{3x^2+1} dx$

[18/7/22]

b) Calcolare l'integrale $\int_1^e \frac{2 \log x + 1}{x(\log^2 x + 1)} dx$

Svolgimento: a) $\Delta < 0$

Il denominatore non ammette radici reali

$$\int \frac{2x+1}{3x^2+1} dx = \int \frac{2x}{3x^2+1} dx + \int \frac{1}{3x^2+1} dx$$

$$= \frac{1}{3} \int \frac{6x}{3x^2+1} dx + \int \frac{1}{(\sqrt{3}x)^2+1} dx$$

$$= \frac{1}{3} \int \frac{6x}{3x^2+1} dx + \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{\sqrt{3}}{(\sqrt{3}x)^2+1} dx$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log |f(x)| + C \quad f(x) = 3x^2+1, \quad f'(x) = 6x$$

$$\int \frac{f'(x)}{1+f^2(x)} dx = \arctan f(x) + C \quad f(x) = \sqrt{3}x, \quad f'(x) = \sqrt{3}$$

$$= \frac{1}{3} \log(3x^2+1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan(\sqrt{3}x) + C$$

b) $\int_1^e \frac{2 \log x + 1}{x(3 \log^2 x + 1)} dx$

Consideriamo il cambio di variabile $t = \log x \Rightarrow dt = \frac{1}{x} dx$

$$x=1 \Rightarrow t = \log 1 = 0$$

$$x=e \Rightarrow t = \log e = 1$$

$$\begin{aligned}
\int_1^e \frac{2 \log x + 1}{3 \log^2 x + 1} \cdot \frac{1}{x} \cdot dx &= \int_0^1 \frac{2t+1}{3t^2+1} dt \\
&= \left[\frac{1}{3} \log(3t^2+1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan(\sqrt{3}t) \right]_0^1 \\
&= \frac{1}{3} \log 4 + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan(\sqrt{3}) - \frac{1}{3} \log 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan 0 \\
&= \frac{1}{3} \log 4 + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3} \log 2 + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

- 3) a) Calcolare l'integrale indefinito $\int \frac{2x+1}{3x^2+x} dx$ [4/7/22]
b) Calcolare l'integrale $\int_0^{\log 5} \frac{2e^x+1}{3e^x+1} dx$

Svolgimento: a) Calcoliamo le radici del denominatore

$$3x^2+x=0 \Leftrightarrow x(3x+1)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=-\frac{1}{3}$$

Il denominatore si fattorizza come segue $3x^2+x = x(3x+1)$

Determiniamo la decomposizione in fattori semplici,

cerchiamo $A, B \in \mathbb{R}$ tali da

$$\frac{2x+1}{3x^2+x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{3x+1} = \frac{A(3x+1)+Bx}{x(3x+1)} = \frac{(3A+B)x + A}{3x^2+x}$$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow \begin{cases} 3A+B=2 \\ A=1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=2-3A=-1 \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{2x+1}{3x^2+x} dx &= \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{3x+1} \right) dx = \int \frac{1}{x} dx - \frac{1}{3} \int \frac{3}{3x+1} dx \\
&= \log|x| - \frac{1}{3} \log|3x+1| + C
\end{aligned}$$

$$b) \int_0^{\log 5} \frac{2e^x+1}{3e^x+1} dx$$

Consideriamo il cambio di variabili $t=e^x \Leftrightarrow x=\ln t$

$$dx = \frac{1}{t} dt \quad x=0 \Rightarrow t=e^0=1$$

$$x=\log 5 \Rightarrow t=e^{\log 5}=5$$

$$\int_0^{\log 5} \frac{2e^x+1}{3e^x+1} dx = \int_1^5 \frac{2t+1}{3t+1} \cdot \frac{1}{t} dt = \int_1^5 \frac{2t+1}{3t^2+t} dt$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\log |t| - \frac{1}{3} \log |3t+1| \right]_1^5 \\
&= \log 5 - \frac{1}{3} \log 16 - \log 1 + \frac{1}{3} \log 4 \\
&= \log 5 + \frac{1}{3} (-\log 16 + \log 4) = \log 5 + \frac{1}{3} \log \frac{1}{4} \\
&= \log 5 - \frac{2}{3} \log 2
\end{aligned}$$

4) a) Calcolare l'integrale improprio $\int \frac{1}{2x^2-3x-2} dx$ [22/6/22]

b) Calcolare l'integrale $\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{x}(2x-3\sqrt{x}-2)} dx$

svolgimento: c) Calcoliamo il $\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2) = 25$

le radici reali e distinte sono $x_{1/2} = \frac{3 \pm 5}{4} < -\frac{1}{2}$

la fattorizzazione del denominatore è data da

$$2x^2 - 3x - 2 = 2(x + \frac{1}{2})(x - 2) = (2x+1)(x-2)$$

Calcoliamo $A, B \in \mathbb{R}$ tali da

$$\frac{1}{2x^2-3x-2} = \frac{A}{2x+1} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2) + B(2x+1)}{(2x+1)(x-2)} = \frac{(A+2B)x - 2A+B}{2x^2-3x-2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A+2B = 0 \\ -2A+B = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -2B = -\frac{2}{5} \\ B = \frac{1}{5} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{2x^2-3x-2} dx &= \int \left(-\frac{2}{5} \frac{1}{2x+1} + \frac{1}{5} \frac{1}{x-2} \right) dx \\
&= -\frac{1}{5} \int \frac{2}{2x+1} dx + \frac{1}{5} \int \frac{1}{x-2} dx \\
&= -\frac{1}{5} \log |2x+1| + \frac{1}{5} \log |x-2| + c \\
&= \frac{1}{5} \log \left| \frac{x-2}{2x+1} \right| + c
\end{aligned}$$

b) $\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{x}(2x-3\sqrt{x}-2)} dx$

consideriamo il cambio di variabili $t = \sqrt{x} \Rightarrow dt = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$

$$x=0 \Rightarrow t = \sqrt{0} = 0$$

$$x = \frac{1}{4} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

$$\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{2}{2x-3\sqrt{x}-2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2}{2t^2-3t-2} \cdot dt$$

$$= 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2t^2 - 3t - 2} dt = \frac{2}{5} \left[\log \left| \frac{t-2}{2t+1} \right| \right]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{2}{5} \left(\log \frac{3}{4} - \log 2 \right) = \frac{2}{5} \left(\log 3 - 2 \log 2 - \log 2 \right)$$

$$= \frac{2}{5} (\log 3 - 3 \log 2)$$

5) e) Calcolare l'integrale indefinito $\int \frac{x}{x^2+2x+5} dx$ [21/2/22]

b) Calcolare l'integrale $\int_{-1}^1 \frac{x^5}{x^6+2x^3+5} dx$

Scegliamento: e) Calcoliamo il discriminante del denominatore

$$\frac{\Delta}{4} = 1^2 - 5 = -4 < 0 \quad \text{le radici complesse coniugate sono } z_{1/2} = -1 \pm 2i$$

$$x^2+2x+5 = (x+1-2i)(x+1+2i) = (x+1)^2 - 4i^2 = (x+1)^2 + 4$$

$$= 4 \left[\frac{(x+1)^2}{4} + 1 \right] = 4 \left[\left(\frac{x+1}{2} \right)^2 + 1 \right]$$

Determino $A, B \in \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{x}{x^2+2x+5} = \frac{A(2x+2)+B}{x^2+2x+5} = \frac{2Ax + 2A+B}{x^2+2x+5}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2A = 1 \\ 2A+B = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ B = -2A = -1 \end{cases}$$

$$\int \frac{x}{x^2+2x+5} dx = \int \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2x+2}{x^2+2x+5} - \frac{1}{x^2+2x+5} \right) dx$$

$$= \frac{1}{2} \log(x^2+2x+5) - \int \frac{1}{4 \left[\left(\frac{x+1}{2} \right)^2 + 1 \right]} dx$$

$$= \frac{1}{2} \log(x^2+2x+5) - \frac{1}{2} \int \frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{x+1}{2} \right)^2 + 1} dx$$

$$= \frac{1}{2} \log(x^2+2x+5) - \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{x+1}{2}\right) + c$$

$$b) \int_{-1}^1 \frac{x^5}{x^6 + 2x^3 + 5} dx$$

Cambio di variabile $t = x^3 \Rightarrow dt = 3x^2 dx$

$$x = -1 \Rightarrow t = (-1)^3 = -1$$

$$x = 1 \Rightarrow t = 1^3 = 1$$

$$\int_{-1}^1 \frac{x^5}{x^6 + 2x^3 + 5} dx = \int_{-1}^1 \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3 \cdot 3x^2}{x^6 + 2x^3 + 5} dx$$

$$= \frac{1}{3} \int_{-1}^1 \frac{t}{t^2 + 2t + 5} dt = \frac{1}{3} \left[\frac{1}{2} \log(t^2 + 2t + 5) - \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{t+1}{2}\right) \right]_{-1}^1$$

$$= \frac{1}{6} (\log 8 - \arctan 1 - \log 4 + \arctan 0) = \frac{1}{6} (\log 2 - \frac{\pi}{4})$$

Esempio (denominatore di grado ≥ 3)

$$\int \frac{x^2 - x + 1}{x^3(x^2 + 1)} dx$$

Il denominatore ha una radice triple ($x=0$) e una coppia di radici complesse coniugate ($z = \pm i$). Allora radice triple corrisponde tre fattori semplici, mentre alle radici complesse coniugate corrisponde un fatto semplice con numeratore di I grado.

Quindi in questo caso la decomposizione in fattori semplici è data da

$$\frac{x^2 - x + 1}{x^3(x^2 + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{Dx + E}{x^2 + 1}$$

con $A, B, C, D, E \in \mathbb{R}$ incognite da determinare.

Sommando di frazioni a secondo membro otteniamo

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - x + 1}{x^3(x^2 + 1)} &= \frac{Ax^2(x^2 + 1) + Bx(x^2 + 1) + C(x^2 + 1) + (Dx + E)x^3}{x^3(x^2 + 1)} \\ &= \frac{A(x^4 + x^2) + B(x^3 + x) + C(x^2 + 1) + Dx^4 + Ex^3}{x^3(x^2 + 1)} \end{aligned}$$

$$= \frac{(A+D)x^4 + (B+E)x^3 + (A+C)x^2 + Bx + C}{x^3(x^2+1)}$$

Poiché deve valere l'uguaglianza

$$x^2 - x + 1 = (A+D)x^4 + (B+E)x^3 + (A+C)x^2 + Bx + D$$

Ma il principio di identità tra polinomi, dobbiamo risolvere il seguente sistema 5×5 (5 equazioni in 5 incognite)

$$\begin{cases} A+D = 0 \\ B+E = 0 \\ A+C = 1 \\ B = -1 \\ C = 1 \end{cases} \quad (\Leftrightarrow) \quad \begin{cases} A = 0 \\ B = -1 \\ C = 1 \\ D = 0 \\ E = 1 \end{cases}$$

Determinata la decomposizione in fattori semplici,

calcoliamo l'integrale con le regole di integrazione elementare

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 - x + 1}{x^3(x^2+1)} dx &= \int \left(-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{1+x^2} \right) dx \\ &= \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \arctan x + C \end{aligned}$$