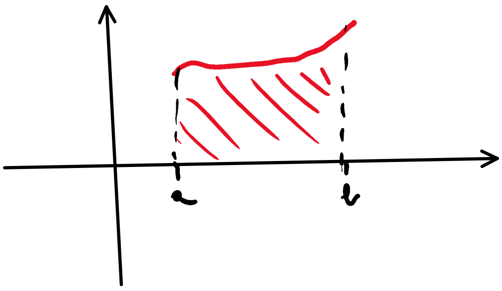
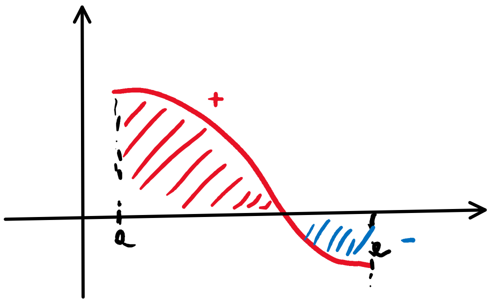
MATEMATICA - LEZIONE 33

venerdì 29 novembre 2024 10:06

Integrali:

Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$. Sia $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrabile in $[a, b]$, abbiamo definito $\int_a^b f(x)\,dx$ come l'area con segno della regione di piano compresa tra il grafico di f in $[a, b]$ e l'asse x.





Notazione: Abbiamo definito $\int_a^b f(x)\,dx$ quando $a < b$.

Se $a = b$ si può definire $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

Se $a > b$ si definisce

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

Gli integrali tra due estremi (in ordine qualsiasi) si dicono INTEGRALI DEFINITI.

PROPRIETÀ

Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ e siano $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrabili in $[a, b]$. Allora

1) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$: $\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx$

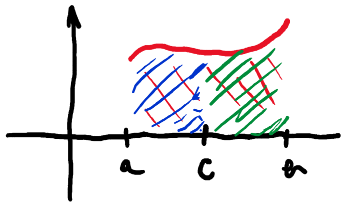
2) Se $f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in [a, b]$, allora $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$

3) $|f|$ è integrabile e

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

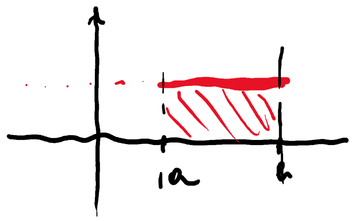
4) (ADDITIVITÀ) Se $c \in [a,b]$, allora:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$



5) Se $c \in \mathbb{R}$:

$$\int_a^b c\,dx = c\cdot(b-a)$$

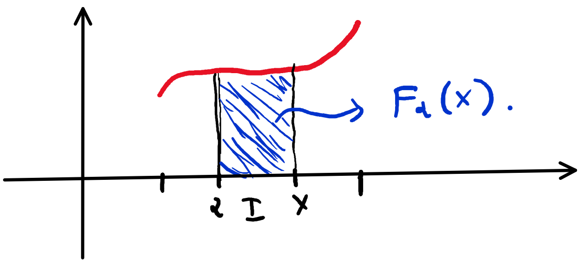


Come si calcolano gli integrali?

Def: Sia I un intervallo e sia $\alpha \in I$. Supponiamo che f sia continua in I. Possiamo definire

$$F_\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}, \quad F_\alpha(x) = \int_\alpha^x f(t)\,dt$$

F_α si dice FUNZIONE INTEGRALE DI f CON PUNTO BASE α

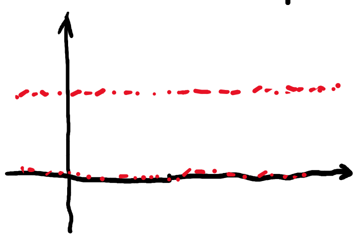


A cosa serve la continuità?

Non tutte le funzioni sono integrabili. Ad esempio

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

non è integrabile in nessun intervallo



TEOREMA (DI INTEGRABILITÀ DELLE FUNZIONI CONTINUE).

Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Se f è continua in $[a, b]$ allora f è integrabile in $[a, b]$.

Nella definizione di funzione integrale abbiamo richiesto la continuità (che garantisce l'integrabilità).

TEOREMA (I TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE)

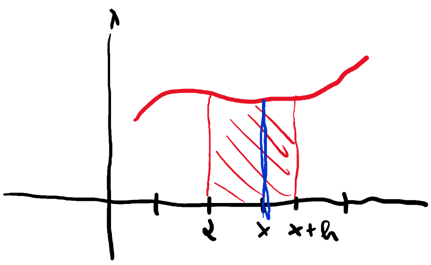
Sia I un intervallo e siano $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua in I e $\alpha \in I$. Sia F_α la funzione integrale di f con punto base α. Allora F_α è derivabile in I e $F_\alpha'(x) = f(x)$ $\forall x \in [a, b]$.

DIM

Dobbiamo far vedere che F_α è derivabile e la sua derivata è f, cioè che $\forall x \in I$:

$$\lim_{h \to 0} \frac{F_\alpha(x+h) - F_\alpha(x)}{h} = f(x).$$

Siano $x \in I$ e h tale che $x + h \in I$. Supponiamo per semplicità $h > 0$.



$$\frac{F_\alpha(x+h) - F_\alpha(x)}{h}$$

$$= \frac{\int_\alpha^{x+h} f(t)\,dt - \int_\alpha^x f(t)\,dt}{h}$$

$$= \frac{\cancel{\int_\alpha^x f(t)\,dt} + \int_x^{x+h} f(t)\,dt - \cancel{\int_\alpha^x f(t)\,dt}}{h} = \frac{\int_x^{x+h} f(t)\,dt}{h}.$$

Sappiamo che f è continua in x. Quindi $\lim_{y \to x} f(y) = f(x)$. Per la definizione di limite:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \text{t.c. se } |y - x| < \delta \quad |f(y) - f(x)| < \varepsilon.$$

$\forall \varepsilon > 0$ se $|h| < \delta$ allora $\forall t \in [x, x+h]$ si ha $|t - x| < \delta \Rightarrow |f(t) - f(x)| < \varepsilon$

cioè $f(x) - \varepsilon < f(t) < f(x) + \varepsilon$

Allora:

$$\frac{\int_x^{x+h} f(t)\,dt}{h} \leq \frac{\int_x^{x+h} (f(x) + \varepsilon)\,dt}{h} = \frac{(f(x)+\varepsilon)\cdot \cancel{h}}{\cancel{h}} = f(x) + \varepsilon$$

e

$$\frac{\int_x^{x+h} f(t)\,dt}{h} \geq f(x) - \varepsilon.$$

Quindi $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ t.c. se $|h| < \delta$ si ha

$$f(x) - \varepsilon \leq \frac{F_a(x+h) - F_a(x)}{h} \leq f(x) + \varepsilon$$

Cioè $$\lim_{h \to 0} \frac{F_a(x+h) - F_a(x)}{h} = f(x). \quad \blacksquare$$

La derivata di F_a è f.

Def: Sia I un intervallo e siano $f: I \to \mathbb{R}$ e $F: I \to \mathbb{R}$. Si dice che F è una **PRIMITIVA** di f in I se F è derivabile in I e $F' = f$.

OSS Il teorema fondamentale del calcolo integrale dice che F_a è una primitiva di f.

ESEMPI DI PRIMITIVE

- $f(x) = 1$

  $F(x) = x$ è una uno primitiva in $\mathbb{R}$

  $F(x) = x + 2$ è una primitiva

  $F(x) = x + 14$

  $F(x) = x - 17$

  $F(x) = x + \pi$

  In generale le primitive sono tutte del tipo

  $F(x) = x + c$ con $c \in \mathbb{R}$

- $f(x) = \sin x$

  $F(x) = -\cos x + c$ è una primitiva.

OSS: Se I è un intervallo e F_1, F_2 sono due primitive di una funzione f, allora $\exists\, c \in \mathbb{R}$ t.c.
$F_2 = F_1 + c$.

DIM

Sappiamo $(F_1)' = f$ e $(F_2)' = f$

$(F_2 - F_1)' = f - f = 0$ in tutto I.

Quindi $F_2 - F_1$ è costante, cioè $\exists\, c \in \mathbb{R}$ t.c.
$F_2 - F_1 = c$. Quindi $F_2 = F_1 + c$.

TEOREMA DI TORRICELLI (II TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE)

Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ e sia $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua in $[a, b]$. Se $F: [a, b] \to \mathbb{R}$ è una qualsiasi primitiva di f, allora

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

DIM.

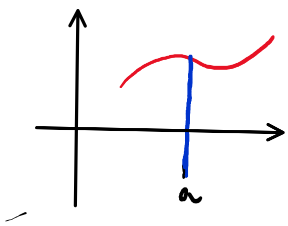
Sappiamo per il primo fondamentale del calcolo int. che $F_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ è una primitiva di f.

Allora $\exists\, c \in \mathbb{R}$ t.c. $F = F_a + c$.

$$F(b) - F(a) = F_a(b) + \cancel{c} - \left(F_a(a) + \cancel{c}\right)$$

$$= F_a(b) - F_a(a)$$

$$= \int_a^b f(t)\,dt - \underbrace{\int_a^a f(t)\,dt}_{=0}$$



$$= \int_a^b f(t)\,dt$$

Ricapitolando

Per calcolare $\int_a^b f(x)\,dx$ si procede così:

1) Si trova una primitiva F di f
2) Si calcola $F(b) - F(a)$.

ESEMPIO

$$\int_1^3 x^3\,dx$$

$f(x) = x^3$

$F(x) = \frac{1}{4}x^4$ è una primitiva (le altre sono $\frac{1}{4}x^4 + c$)

$$\int_1^3 x^3\,dx = F(3) - F(1) = \frac{1}{4}3^4 - \frac{1}{4}\cdot 1^4 = \frac{81}{4} - \frac{1}{4}$$

$$= \frac{80}{4} = 20.$$

Notazione

$$F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$$

Quindi:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

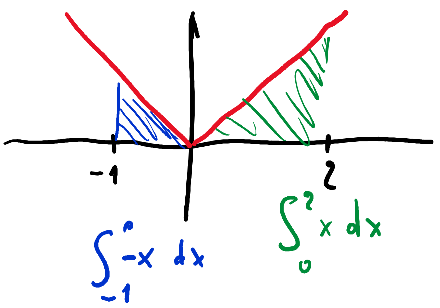
$$\int_1^3 x^3\,dx = \frac{1}{4}x^4\Big|_1^3 = \frac{1}{4}3^4 - \frac{1}{4}\cdot 1^4 = 20.$$

ESEMPIO

$$\int_1^2 |x|\,dx = \int_1^2 x\,dx = \frac{1}{2}x^2\Big|_1^2 = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\int_{-1}^2 |x|\,dx = \int_{-1}^0 -x + \int_0^2 x\,dx = -\frac{1}{2}x^2\Big|_{-1}^0 + \frac{1}{2}x^2\Big|_0^2$$

$$= +\frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$$



$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0. \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Def: L'insieme di tutte le primitive di una funzione si dice INTEGRALE INDEFINITO di f e si indica con $\int f(x)\,dx$. Se F è una particolare primitiva allora

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c \quad \text{con } c \in \mathbb{R}.$$

- PRIMITIVE ELEMENTARI

- $\int 1\,dx = x + c$
- $\int \alpha\,dx = \alpha x + c$
- $\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 + c$
- $\int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3 + c$
- $\int x^\alpha\,dx = \frac{1}{1+\alpha}x^{1+\alpha} + c \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}.$
- $\int x^{-1}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln x + c$ se $x > 0$

  $\int x^{-1}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c \quad \forall x \in (-\infty, 0)$ o $x \in (0, +\infty)$
- $\int e^x\,dx = e^x + c$
- $\int \sin x\,dx = -\cos x + c$
- $\int \cos x\,dx = \sin x + c$

- $\int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = \tan x + c$
- $\int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \arctan x + C.$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \arcsin x + C$
- $\int -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = -\arcsin x + C = \arccos x + C_2$

PROPRIETÀ

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ allora

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx = \alpha \int f(x)\, dx + \beta \int g(x)\, dx$$

ESEMPIO

$$\int e^x - 3 \sin x \, dx = \int e^x\, dx - 3 \int \sin x \, dx$$

$$= e^x - 3(-\cos x) + C$$

$$= e^x + 3 \cos x + C.$$

$$\int_0^{\pi} e^x - 3 \sin x \, dx = (e^x + 3 \cos x)\Big|_0^{\pi}$$

$$= e^{\pi} + 3\cos(\pi) - (e^0 + 3 \cos 0)$$

$$= e^{\pi} - 3 - (1+3)$$

$$= e^{\pi} - 7.$$

PROPRIETÀ

Se F è una primitiva di f, allora $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$:

$$\int f(ax+b)\,dx = F(ax+b)\cdot\frac{1}{a} + c$$

ESEMPIO

- $\displaystyle\int e^{2x}\,dx = e^{2x}\cdot\frac{1}{2} + c$
  $\displaystyle= \frac{1}{2}e^{2x} + c$

$$\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)' = \frac{1}{\cancel{2}}\,e^{2x}\cdot\cancel{2} = e^{2x}$$ ✓

- $\displaystyle\int e^{3x-1}\,dx = \frac{e^{3x-1}}{3} + c$

- $\displaystyle\int \cos(4x)\,dx = \frac{\operatorname{sen}(4x)}{4} + c$

- $\displaystyle\int \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)dx = \frac{-\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{1}{2}} + c = -2\cos\left(\frac{x}{2}\right) + c$

- $\displaystyle\int \frac{1}{4x+1}\,dx = \frac{\ln|4x+1|}{4} + c = \frac{1}{4}\ln|4x+1| + c$

- $\displaystyle\int e^{-x}\,dx = \frac{e^{-x}}{-1} + c = -e^{-x} + c$

- $\displaystyle\int \frac{1}{2-x}\,dx = \frac{\ln|2-x|}{-1} + c = -\ln|2-x| + c$

$$\bullet \int \frac{1}{3-7x}\,dx = \frac{\ln|3-7x|}{-7} + c$$

$$= -\frac{1}{7}\ln|3-7x| + c$$

· Ricordare bene

$$\int \frac{1}{ax+b}\,dx = \frac{\ln|ax+b|}{a} + c = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + c$$

Vale solo per polinomi di 1° grado.

$$\bullet \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + c$$

$$\bullet \int \frac{1}{2+x^2}\,dx = \int \frac{1}{2\left(1+\frac{x^2}{2}\right)}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+\frac{x^2}{2}}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{2}}} + c$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + c.$$

Più in generale :

$$\int \frac{1}{x^2+K^2}\,dx = \frac{1}{K}\arctan\left(\frac{x}{K}\right) + c$$

$$\int \frac{1}{(x-x_0)^2+K^2}\,dx = \frac{1}{K}\arctan\left(\frac{x-x_0}{K}\right) + c.$$

__Nota__ Non tutti gli integrali sono calcolabili

$$\int e^{x^2} dx \qquad \text{non c'è una primitiva "nota" di } e^{x^2}.$$

PROPRIETÀ

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c$$

- $$\int \frac{1}{ax+b} dx = \int \frac{1}{a} \cdot \frac{a}{ax+b} = \frac{1}{a} \int \frac{\overset{f'}{a}}{\underset{f}{ax+b}} dx = \frac{1}{a} \ln|ax+b| + c.$$

- $$\int \tan x \, dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} dx = -\int \frac{\overset{f'}{-\operatorname{sen} x}}{\underset{f}{\cos x}} dx = -\ln|\cos x| + c$$

$$\left((\ln|f(x)| + c)' = \frac{1}{\cancel{|f(x)|}} \cdot \frac{\cancel{|f(x)|}}{f(x)} \cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \right)$$

- $$\int \frac{x}{x^2+2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+2} dx = \frac{1}{2} \ln|x^2+2| + c = \frac{1}{2} \ln(x^2+2) + c.$$

PROPRIETÀ

$$\int f(x)^{\alpha} f'(x) \, dx = \frac{1}{1+\alpha} f(x)^{1+\alpha} + c$$

$$\int \underbrace{\sin^2 x}_{f^2} \underbrace{\cos x}_{f'} \, dx = \frac{1}{3} \sin^3 x + c \qquad f(x) = \sin x$$

$$\int \frac{\arctan x}{1+x^2} \, dx = \int f(x) \cdot f'(x) \, dx \qquad \text{dove } f(x) = \arctan x$$

$$= \frac{1}{2} f(x)^2 + c$$

$$= \frac{1}{2} \arctan^2 x + c.$$

Nelle prossime lezioni vedremo:

1) Formule di integrazione per parti.
2) Formule di integrazione per sostituzione.
3) Integrali di funzioni razionali (rapporti tra polinomi).

$$\int \frac{a(x)}{b(x)} \, dx \quad \text{con } a \text{ e } b \text{ polinomi:}$$

- $\deg(a) < \deg(b)$ e $\deg b = 1$

$$\int \frac{c}{ax+b} \, dx = c \int \frac{1}{ax+b} \, dx = \frac{c}{a} \ln|ax+b| + c.$$

- $\deg(a) < \deg(b)$ e $\deg b = 2$.

Se si può scomporre il denominatore, l'integrale si può spezzare in integrali più facili.

ESEMPIO

$$\int \frac{1}{x^2-1} \, dx = \int \frac{1}{(x-1)(x+1)} \, dx$$

Usiamo l'uguaglianza:

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{2}\frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{x+1}$$

$$\left(\frac{1}{2}\frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}\frac{x+1-(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{\cancel{2}}\frac{\cancel{2}}{(x-1)(x+1)} \right)$$

Quindi

$$\int \frac{1}{x^2-1}\,dx = \int \frac{1}{2}\frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{x+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1| + c$$

Come si fa a capire che $\frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{2}\frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{x+1}$?

Idea: Si cercano A, B t.c.

$$\frac{1}{(x+1)(x-1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$

$$= \frac{A(x+1) + B(x-1)}{(x+1)(x-1)}$$

Vogliamo che

$$1 = A(x+1) + B(x-1)$$

$$= x(A+B) + A-B$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ A-B=1 \end{cases} \Rightarrow A = \frac{1}{2} \quad B = -\frac{1}{2}$$

cioè $\frac{1}{(x+1)(x-1)} = \frac{1}{2}\frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{x+1}$.