

Nell'ultima lezione abbiamo visto polinomi e formule di Taylor di centro 0. In questo caso i polinomi di Taylor sono nati anche come pol. DI MACLAURIN.

Cosa succede se $x_0 \neq 0$.

ESEMPIO

$$f(x) = e^x, \quad x_0 = 2$$

Ci sono due metodi.

1) Usare la definizione:

$$f(x) = e^x \Rightarrow f^{(n)}(x) = e^x \Rightarrow f^{(n)}(2) = e^2$$

Quindi:

$$\begin{aligned} T_{n, f, 2}(x) &= \sum_{h=0}^n \frac{f^{(h)}(2)}{h!} (x-2)^h \\ &= \sum_{h=0}^n \frac{e^2}{h!} (x-2)^h \\ &= e^2 + e^2(x-2) + \frac{e^2}{2} (x-2)^2 + \dots + \frac{e^2}{n!} (x-2)^n \end{aligned}$$

2° metodo: Cercare una sostituzione

$$e^x = e^{2+x-2} = e^2 e^{x-2}$$

$$y = x-2 \xrightarrow{x \rightarrow 2} 0$$

$$= e^2 e^y$$

$$= e^2 \left(1 + y + \frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{6} y^3 + \dots + \frac{1}{n!} y^n + o(y^n) \right)$$

$$= e^2 \left(1 + (x-2) + \frac{1}{2} (x-2)^2 + \frac{1}{6} (x-2)^3 + \dots + \frac{1}{n!} (x-2)^n + o((x-2)^n) \right)$$

$$\begin{aligned}
 &= e^2 \left(1 + (x-2) + \frac{1}{2} (x-2)^2 + \frac{1}{6} (x-2)^3 + \dots + \frac{1}{n!} (x-2)^n + o((x-2)^n) \right) \\
 &= \underbrace{e^2 + e^2(x-2) + \frac{e^2}{2} (x-2)^2 + \frac{e^2}{6} (x-2)^3 + \dots + \frac{e^2}{n!} (x-2)^n + o((x-2)^n)}_{T_{f,n,2}(x)}
 \end{aligned}$$

ESEMPIO

$f(x) = \sqrt{x}$. Sviluppo di ordine 2 di centro $x_0 = 4$.

$$\sqrt{x} = \sqrt{4 + x - 4} = 2 \sqrt{1 + \frac{x-4}{4}} = 2 \sqrt{1+y} \quad \text{dove } y = \frac{x-4}{4}$$

$$= 2 \left(1 + \frac{1}{2} y - \frac{1}{8} y^2 + o(y^2) \right)$$

$$= 2 + y - \frac{1}{4} y^2 + o(y^2)$$

$$= 2 + \frac{x-4}{4} - \frac{1}{4} \left(\frac{x-4}{4} \right)^2 + o\left(\left(\frac{x-4}{4} \right)^2 \right)$$

$$= 2 + \frac{x-4}{4} - \frac{(x-4)^2}{64} + o((x-4)^2).$$

$$\left(\sqrt{4+x-4} = \sqrt{4 \left(1 + \frac{x-4}{4} \right)} = 2 \sqrt{1 + \frac{x-4}{4}} \right)$$

ESERCIZIO.

Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos(2x^2) - \log(1-x^3) - \sin x}{x^3 (\sqrt{1+x} - e^{\frac{x}{2}})}$$

Numeratore:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$$

$$\dots \quad (2x^2) \quad y = 2x^2 \quad \dots$$

$$\begin{aligned}
 \cos(2x^2) &\stackrel{y=2x^2}{=} \cos(y) \\
 &= 1 - \frac{1}{2} y^2 + o(y^2) \\
 &= 1 - \frac{1}{2} (2x^2)^2 + o((2x^2)^2) \\
 &= 1 - 2x^4 + o(x^4)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x \cos(2x^2) &= x(1 - 2x^4 + o(x^4)) \\
 &= x - 2x^5 + o(x^5)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \log(1-x^3) &\stackrel{y=-x^3}{=} \log(1+y) \\
 &= y - \frac{y^2}{2} + o(y^2) \\
 &= -x^3 - \frac{(-x^3)^2}{2} + o((-x^3)^2) \\
 &= -x^3 - \frac{1}{2} x^6 + o(x^6) \\
 &= -x^3 + o(x^5)
 \end{aligned}$$

Numerator:

$$\begin{aligned}
 &x - 2x^5 + o(x^5) + x^3 + o(x^5) - \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\right) \\
 &\cancel{x} - 2x^5 + o(x^5) + \underline{x^3} - \cancel{x} + \underline{\frac{x^3}{6}} - \frac{x^5}{120} + o(x^5) \\
 &= \underline{\frac{7}{6} x^3} - 2x^5 - \frac{x^5}{120} + o(x^5) \\
 &= \frac{7}{6} x^3 + o(x^3)
 \end{aligned}$$

Denominator: $x^3 (\sqrt{1+x} - e^{\frac{x}{2}})$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2) \quad]$$

$$e^{\frac{x}{2}} \stackrel{y=\frac{x}{2}}{=} 1 + y + \frac{1}{2}y^2 + o(y^2)$$

$$\begin{aligned}
 e^{\frac{x}{2}} &= 1 + \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{2}\right)^2 + o\left(\frac{x}{2}\right)^2 \\
 &= 1 + \frac{x}{2} + \frac{1}{8} x^2 + o(x^2) \\
 &= 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} + o(x^2) \quad]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x^3 (\sqrt{1+x} - e^{\frac{x}{2}}) &= x^3 \left(-\frac{1}{8} x^2 + o(x^2) - \frac{1}{8} x^2 + o(x^2) \right) \\
 &= x^3 \left(-\frac{1}{4} x^2 + o(x^2) \right) \\
 &= -\frac{1}{4} x^5 + o(x^5)
 \end{aligned}$$

Il limite si riduce a :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{7}{6} x^3 + o(x^3)}{-\frac{1}{4} x^5 + o(x^5)} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{7}{6} x^3}{-\frac{1}{4} x^5} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{7}{6}}{-\frac{1}{4}} \cdot \frac{1}{x^2} = -\infty$$

$$\begin{aligned}
 &\frac{\frac{7}{6} x^3 \left(1 + \frac{o(x^3)}{x^3} \right)}{-\frac{1}{4} x^5 \left(1 + \frac{o(x^5)}{x^5} \right)} \rightarrow 1
 \end{aligned}$$

ESEMPIO

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^4} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right)}{x^4} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \left(\frac{1}{6} + \frac{o(x^3)}{x^3} \right)}{x^4} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{6} + \frac{o(x^3)}{x^3}}{x} \quad \neq
 \end{aligned}$$

$$\text{Perché: } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{6} + \frac{o(x^3)}{x^3}}{x} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{1}{6} + \frac{o(x^3)}{x^3}}{x} = -\infty.$$

ESEMPIO

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - x^2}{x^2 + 2 \log(\cos x)}$$

Numeratore:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$\begin{aligned} \sin^2 x &= \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right)^2 \\ &= x^2 + \frac{x^6}{36} + o(x^6) - \frac{x^4}{3} + o(x^4) \end{aligned}$$

$2 \cdot x \cdot \left(-\frac{x^3}{6} \right) = -\frac{x^4}{3}$

$$= x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)$$

$$\sin^2 x - x^2 = -\frac{x^4}{3} + o(x^4)$$

Denominatore

$$\log(\cos x) = \log \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4) \right)$$

$$= \log(1+y)$$

$$= y - \frac{y^2}{2} + o(y^2)$$

$$= -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)$$

$$\begin{aligned} &- \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4) \right)^2 \\ &+ o \left(\left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4) \right)^2 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4}x^4 + o(x^4) \right) \\ &+ o(x^4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + o(x^4) \\
& = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{8}x^4 + o(x^4) \\
& = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 + o(x^4)
\end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned}
x^2 + 2 \log(\cos x) &= x^2 + 2 \left(-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 + o(x^4) \right) \\
&= \cancel{x^2} - \cancel{x^2} - \frac{x^4}{6} + o(x^4) \\
&= -\frac{x^4}{6} + o(x^4)
\end{aligned}$$

conclusione

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{6}x^4 + o(x^4)}{-\frac{1}{6}x^4 + o(x^4)} = \frac{-\frac{1}{6}}{-\frac{1}{6}} = 1$$

Sia $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ con $a, b \in \mathbb{R}^n$ con $a < b$.

Sia $x_0 \in (a, b)$. Assumiamo f derivabile n volte in x_0 .

$E_n(x) = f(x) - T_{n, f, x_0}(x)$, la formula di Taylor con resto di Peano dice che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{E_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0 \quad \text{cioè} \quad E_n(x) = o((x - x_0)^n) \text{ per } x \rightarrow x_0.$$

FORMULA DI TAYLOR CON RESTO DI LAGRANGE.

Sia $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ con $a, b \in \mathbb{R}^n$ e $a < b$.

Sia $x_0 \in (a, b)$. Assumiamo f $(n+1)$ - volte

derivabile in (a, b) . Allora $\exists c \in (a, b)$ tale

$$E_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

derivabile in (a, b) . Allora $\exists c \in (a, b)$ tale che $E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$. Inoltre c è compreso tra x e x_0 .

Questa formula consente di approssimare numeri irrazionali.

ESEMPIO

Approssimiamo e .

$$f(x) = e^x, \quad x_0 = 0.$$

$$\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = T_{n, f, 0}(x) + E_n(x)$$

$$e = f(1) = T_{n, f, 0}(1) + E_n(1). \quad (x=1).$$

Ricordiamo che

$$T_n(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \dots + \frac{1}{n!}x^n$$

$$T_n(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{n!}$$

La formula di Lagrange ci dice che

$$\begin{aligned} E_n(1) &= \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (1-0) && \text{don } c \in (0, 1) \\ &= \frac{e^c}{(n+1)!} \end{aligned}$$

$$\text{Quindi} \quad 0 \leq E_n(1) < \frac{e}{(n+1)!}$$

Se ad esempio $n=5$ troviamo che

$$0 < E_n(1) < \frac{e}{6!} = \frac{e}{720} < \frac{3}{720} = \frac{1}{240} < \frac{1}{200} = 0,005$$

e si può approssimare con $T_5(1)$ e l'errore è minore di 0,005.

e si può approssimare con $I_5(1)$ e l'errore è più piccolo di 0,005.

$$T_5(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} = \frac{163}{120} = 2,71\bar{6}$$

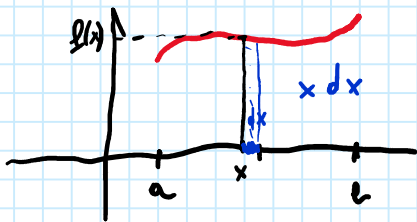
Integrali:

Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.
Vogliamo calcolare l'area della regione di piano compresa tra il grafico di f e l'asse x .



Indicheremo quest'area con

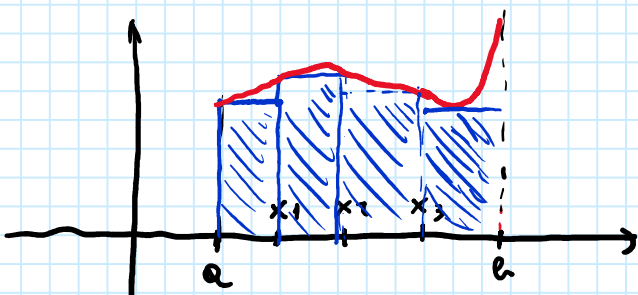
$$\int_a^b f(x) dx$$



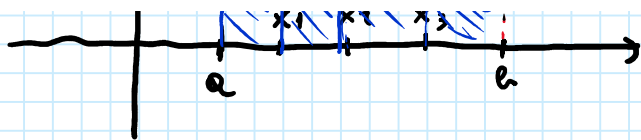
Problemi:

- 1) Come si definisce rigorosamente $\int_a^b f(x) dx$?
- 2) Come si calcola?

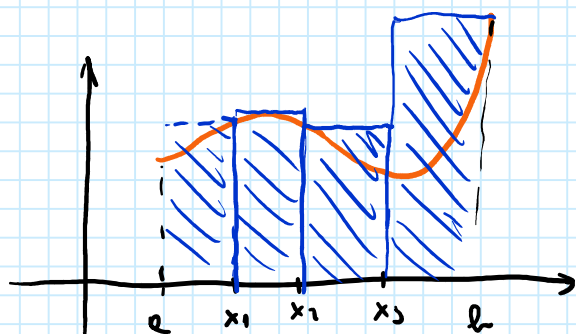
Per definire l'area possiamo approssimare il grafico di f con dei rettangoli:



Costruiamo un pluriretangolo che sta sotto il grafico di f . L'area del pluriretangolo è un'approssimazione dell'

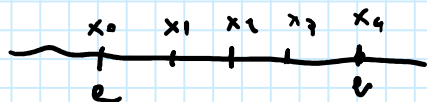


P è una suddivisione di $[a, b]$ e un'approssimazione dal basso dell'area che vogliamo calcolare.



In questo modo si ottiene un'approssimazione dall'alto dell'area

Def: Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Una **SUDDIVISIONE** o **PARTIZIONE** di $[a, b]$ è un insieme $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ dove $x_0 = a$, $x_n = b$ e $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$.



oss Se P è una partizione di P . Allora

$$[a, b] = [x_0, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup [x_2, x_3] \cup \dots \cup [x_{n-1}, x_n] \\ = \bigcup_{n=1}^m [x_{n-1}, x_n]$$

Def: Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Sia $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ una suddivisione di $[a, b]$ e sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitata in $[a, b]$. Definiamo

$$1) s(f, P) = \sum_{n=1}^m \inf_{[x_{n-1}, x_n]} f \cdot (x_n - x_{n-1}) \quad \left(\begin{array}{l} \text{SOMMA INTEGRALE} \\ \text{INFERIORE DI } f \text{ RISPETTO} \\ \text{A } P \end{array} \right)$$

$$2) S(f, P) = \sum_{n=1}^m \sup_{[x_{n-1}, x_n]} f \cdot (x_n - x_{n-1}) \quad \left(\begin{array}{l} \text{SOMMA INTEGRALE} \\ \text{SUPERIORE} \end{array} \right)$$

oss

$\forall P_1, P_2$ suddivisioni di $[a, b]$:

oss

$\forall P_1, P_2$ suddivisioni di $[a, b]$:

$$s(f, P) \leq S(f, P)$$

Consideriamo gli insiemi:

$$A_f = \{ s(f, P) \mid P \text{ partizione di } [a, b] \}$$

$$B_f = \{ S(f, P) \mid P \text{ partizione di } [a, b] \}.$$

Def: Sia $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$. Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitata. Si dice che f è **INTEGRABILE (SECONDO RIEMANN)** in $[a, b]$ se $\sup A_f = \inf B_f$. In tal caso, si definisce **INTEGRALE DI f IN $[a, b]$** la quantità:

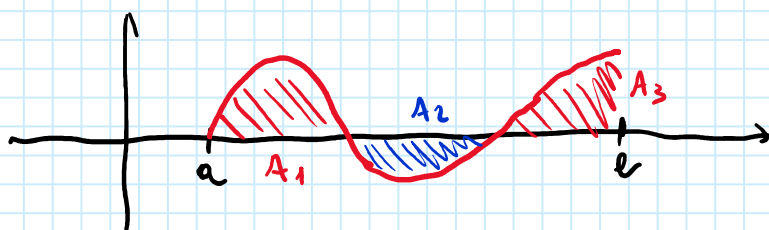
$$\int_a^b f(x) dx = \sup A_f = \inf B_f.$$

Interpretazione grafica

- Se $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è limitata e $f(x) \geq 0$.

$\int_a^b f(x) dx$ rappresenta l'area sotto il grafico di f .

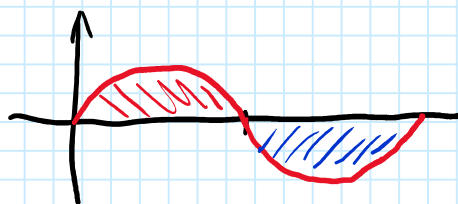
- E se f cambia segno? Le regioni dove $f < 0$ vengono contate con segno negativo:



$$\int_a^b f(x) dx = A_1 - A_2 + A_3.$$

$$\int_a^b f(x) dx = A_1 - A_2 + A_3.$$

$$\int_0^{2\pi} \sin x dx = 0$$



Vedremo che se F è una funzione che ha per derivata f , allora

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

$$\int_0^{2\pi} \sin x dx$$

$$f(x) = \sin x$$

$$F(x) = -\cos x$$

$$\int_0^{2\pi} \sin x dx = -1 - (-1) = 0$$

$$F(2\pi) = -\cos 2\pi = -1$$

$$F(0) = -\cos 0 = -1$$

$$\int_0^1 x dx$$

$$f(x) = x$$

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2$$

$$F(0) = 0$$

$$F(1) = \frac{1}{2}$$

$$\int_0^1 x dx = F(1) - F(0) = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}.$$