MATEMATICA - LEZIONE 30

mercoledì 27 novembre 2024 09:05

Def: Sia $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ con I intervallo. Sia $x_0 \in I$ e supponiamo che f sia derivabile n volte ($n \in \mathbb{N}$) in x_0. Definiamo POLINOMIO DI TAYLOR DI f DI ORDINE n E DI CENTRO x_0 il polinomio

$$T_{n,f,x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x-x_0)^2 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$$

OSS Per definizione si ha che:

$$T^{(k)}_{n,f,x_0}(x_0) = f^{(k)}(x_0) \quad \forall\, 0 \leq k \leq n.$$

TEOREMA DI PEANO (FORMULA DI TAYLOR CON RESTO DI PEANO)

Sia I intervallo e siano $x_0 \in I$ e $f: I \to \mathbb{R}$ una funzione. Se f è derivabile n volte in x_0 allora

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - T_{n,f,x_0}(x)}{(x-x_0)^n} = 0$$

cioè $f(x) = T_{n,f,x_0}(x) + o((x-x_0)^n)$

ESEMPIO

$f(x) = e^x$, $x_0 = 0$

$f^{(k)}(x) = e^x \quad \forall\, k \in \mathbb{N}$. Quindi $f^{(k)}(0) = e^0 = 1$

$$T_{f,n,0}(x) = \overbrace{f(x_0)}^{1} + \overbrace{f'(x_0)}^{1}(x - \overbrace{x_0}^{0}) + \overbrace{\frac{f''(x_0)}{2}}^{1}(x - \overbrace{x_0}^{0})^2 + \frac{1}{6}\overbrace{f'''(x_0)}^{1}(x-x_0)^3$$

$$+ \dots + \frac{1}{n!}\underbrace{f^{(n)}(x_0)}_{1}(x-x_0)^n.$$

$$= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \dots + \frac{1}{n!}x^n.$$

Polinomi di Taylor di e^x di centro 0

$T_{f,0,0}(x) = 1$

$T_{f,1,0}(x) = 1 + x$

$T_{f,2,0}(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$

$T_{f,3,0}(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3$

$T_{f,4,0}(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4$

Formule / sviluppi di Taylor di e^x per $x \to 0$.

$e^x = 1 + o(1)$

$e^x = 1 + x + o(x)$

$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$

$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$

Applicazione (calcolo di alcuni limiti)

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} \qquad \frac{0}{0} \text{ f.i.}$$

Sostituiamo e^x utilizzando la formula di Taylor di ordine 2:

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cancel{1} + \cancel{x} + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) - \cancel{1} - \cancel{x}}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)}{x^2}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{o(x^2)}{x^2}}_{\to 0} = \frac{1}{2}$$

> **Ricordare**
>
> $o(f(x))$ per $x \to x_0$ significa $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{o(f(x))}{f(x)} = 0$

Polinomi di Taylor di alcune funzioni elementari.

- $f(x) = \sin x$ e $x_0 = 0$

$$f(x) = \sin x \qquad f(0) = 0$$
$$f'(x) = \cos x \qquad f'(0) = 1$$
$$f''(x) = -\sin x \qquad f''(0) = 0$$
$$f'''(x) = -\cos x \qquad f'''(x) = -1$$
$$f^{(4)}(x) = \sin x \qquad 0$$
$$\cos x \qquad 1$$
$$-\sin x \qquad 0$$
$$-1$$
$$\vdots \qquad 0$$
$$1$$
$$\vdots$$

$$T_{f,n,0}(x) = 0 + x + 0 - \frac{1}{6}x^3 + 0 + \frac{1}{5!}x^5 + 0 + -\frac{1}{7!}x^7 + \dots$$

ci sono solo le potenze dispari perché $\sin x$ è dispari.

Notazione: Quando f e x_0 sono specificati scriviamo $T_n(x)$ invece di $T_{n,f,x_0}(x)$

Polinomi di Taylor di $\sin x$

$T_0(x) = 0$

$T_1(x) = x$

$T_2(x) = x$

$T_3(x) = x - \frac{1}{6}x^3$

$T_4(x) = x - \frac{1}{6}x^3$

$T_5(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5$

Formule / sviluppi di Taylor

$\sin x = o(1)$

$\sin x = x + o(x)$

$\sin x = x + o(x^2)$

$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$

$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)$

$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^5)$

- $f(x) = \cos x$ con $x_0 = 0$.

$$T_n(x) = 1 - \underbrace{\frac{1}{2}}_{2!}x^2 + \underbrace{\frac{1}{24}}_{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \dots\dots$$

$T_0(x) = 1$

$T_1(x) = 1$

$T_2(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2$

$$T_3(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2$$

$$T_4(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4$$

Nota: I polinomi di Taylor si possono scrivere anche con i simboli di sommatoria:

- $f(x) = e^x$ in $x_0 = 0$

$$T_n(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \dots + \frac{1}{n!}x^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

- $f(x) = \sin x$, $x_0 = 0$

$$T_{2n+1}(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

- $f(x) = \cos x$

$$T_{2n}(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

In generale:

$$T_{n,f,x_0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

- $f(x) = \log(1+x)$, $x_0 = 0$

$$T_n(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots + \frac{x^n}{n}(-1)^{n-1}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}$$

• $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ con $x_0 = 0$

$$T_n(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \dots + x^n$$
$$= \sum_{k=0}^{n} x^k$$

• $f(x) = \arctan x$, $x_0 = 0$

$$T_{2n+1}(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$
$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

• $f(x) = (1+x)^{\alpha}$

$$T_n(x) = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \dots + \binom{\alpha}{n} x^n$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k$$

dove $\displaystyle\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$

ESEMPIO

$f(x) = \sqrt[3]{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{3}}$ α , $x_0 = 0$, $n = 2$

$$T_2(x) = 1 + \frac{1}{3}x + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2}x^2 = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2$$

Nota la formula è utile quando $\alpha \notin \mathbb{N}$.
Se $\alpha \in \mathbb{N}$, $(1+x)^{\alpha}$ è già un polinomio.

$(1+x)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3$ in $x_0 = 0$

$T_1 = 1 + 3x$

$T_2 = 1 + 3x + 3x^2$

$T_3 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3$

$T_4 = T_3$
$T_5 = T_5$

ESERCIZI

1) $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^x - x - \cos x}{2x \sin x}$ f.i. $\dfrac{0}{0}$

Denominatore:

$\sin x = x + o(x)$

$2x \sin x \Rightarrow 2x\,(x + o(x)) = 2x^2 + \underbrace{2x\, o(x)}_{= o(x^2)}$
$= 2x^2 + o(x^2)$

Numeratore:

$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$
$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$

$e^x - x - \cos x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) - x - \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right)$
$= \cancel{1} + \cancel{x} + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) - \cancel{x} - \cancel{1} + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$
$= x^2 + \underbrace{o(x^2) + o(x^2)}_{o(x^2)}$
$= x^2 + o(x^2)$

Quindi:

$\lim_{x \to 0} \dfrac{x^2 + o(x^2)}{2x^2 + o(x^2)} = \lim_{x \to 0} \dfrac{\cancel{x^2}\left(1 + \overbrace{\frac{o(x^2)}{x^2}}^{\to 0}\right)}{\cancel{x^2}\left(2 + \underbrace{\frac{o(x^2)}{x^2}}_{\to 0}\right)} = \frac{1}{2}$

Attenzione: Non sarebbe stato sufficiente sviluppare all'ordine 1:

$$e^x - x - \cos x = 1 + x + o(x) - x - (1 + o(x))$$
$$= \cancel{1} + \cancel{x} + o(x) - \cancel{x} - \cancel{1} + o(x)$$
$$= o(x).$$

$$\frac{o(x)}{2x^2} = \underbrace{\frac{o(x)}{x}}_{\searrow 0} \cdot \frac{1}{2x} \xrightarrow{x \to 0^+} +\infty \qquad 0 \cdot +\infty \quad \text{f.i.}$$

Sviluppare all'ordine 3 invece va bene ma si ottengono più termini del necessario.

$$e^x - x - \cos x = \cancel{1} + \cancel{x} + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) - \cancel{x} - \left(\cancel{1} - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)\right)$$
$$= x^2 + \underbrace{\frac{1}{3}x^3 + o(x^3)}_{o(x^2)}$$
$$= x^2 + o(x^2)$$

---

2) Calcoliamo

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x \, \log(1+x) - x}{2\sqrt{1+x} - \sin x - 2\cos x}$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$
$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2).$$
$$\cos x \cdot \log(1+x) = \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right)\left(x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right)$$
$$= x - \frac{1}{2}x^2 + \boxed{o(x^2)} \underbrace{- \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + o(x^4) + o(x^3) + o(x^4) + o(x^4)}_{o(x^2)}$$

$$= x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$

Quindi il numeratore è

$$x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) - x = -\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$

Denominatore: $2\sqrt{1+x} - \sin x - 2\cos x$

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2}x^2 + o(x^2)$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$$

$$\sin x = x + o(x^2)$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$

Quindi

$$2\sqrt{1+x} - \sin x - 2\cos x$$

$$= \cancel{2} + \cancel{x} - \frac{1}{4}x^2 + o(x^2) - \cancel{x} + o(x^2) - \underbrace{2\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right)}_{-\cancel{2} + x^2 + o(x^2)}$$

$$= -\frac{1}{4}x^2 + x^2 + o(x^2)$$

$$= \frac{3}{4}x^2 + o(x^2)$$

Quindi il limite si riduce a

$$\lim_{x \to 0} \frac{-\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)}{\frac{3}{4}x^2 + o(x^2)} = \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{1}{2}x^2}{\frac{3}{4}x^2} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}}$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} = -\frac{2}{3}$$

Domanda: Come si trova lo sviluppo di e^{-x} in $x=0$?

Si può fare una sostituzione:

Per $x \to 0$ si $y = -x$. Notiamo che $y \to 0$.

$$e^{-x} = e^{y} = 1 + y + \frac{1}{2}y^2 + \dots + \frac{1}{n!}y^n + o(y^n)$$

$$= 1 - x + \frac{1}{2}(-x)^2 + \frac{1}{6}(-x)^3 + \dots + \frac{1}{n!}(-x)^n + o((-x)^n)$$

$$= 1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \dots + \frac{(-1)^n}{n!}x^n$$

Si può anche usare che $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$ ma è più difficile

$$\frac{1}{e^x} = \frac{1}{1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)} \quad \text{se } y = -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 - o(x^3)$$

$(y = -x + o(x))$

$$= \frac{1}{1-y} = 1 + y + y^2 + y^3 + o(y^3)$$

$$= 1 - x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) + \left(x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\right)^2$$

$$+ \left(-x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\right)^3 + o((-x)^3)$$

$$= 1 - x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) + x^2 \cancel{+ x^3} + o(x^3)$$

$$\cancel{- x^3} + o(x^3)$$

$$= 1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$$

ESEMPIO

Sviluppo di Taylor di $\operatorname{sen}(2x)$ con $x_0 = 0$, $n = 5$

$\operatorname{sen}(2x) \overset{t=2x}{=} \operatorname{sen} t$ e se $x \to 0$ anche $t = 2x \to 0$

Quindi

$$\operatorname{sen} t = t - \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{120}t^5 + o(t^5)$$

$$= 2x - \frac{1}{6}(2x)^3 + \frac{1}{120}(2x)^5 + o((2x)^5)$$

$$= 2x - \frac{8x^3}{6} + \frac{32x^5}{120} + o(x^5)$$

$$= 2x - \frac{4}{3}x^3 + \frac{4}{15}x^5 + o(x^5)$$

ESEMPIO

$f(x) = \sqrt{1+3x^2}$ cerchiamo lo sviluppo di ordine 4 di centro $x_0 = 0$

$$\sqrt{1+3x^2} \overset{y=3x^2}{=} \sqrt{1+y}$$
$$= 1 + \frac{1}{2}y - \frac{1}{8}y^2 + o(y^2)$$
$$= 1 + \frac{1}{2}(3x^2) - \frac{1}{8}(3x^2)^2 + o((3x^2)^2)$$
$$= 1 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{9}{8}x^4 + o(x^4)$$

E se volessi sviluppare $\log(2+x)$ all'ordine 3 in $x_0 = 0$?

$$\log(2+x) = \log(1+1+x) = \log(1+y)$$

se $y = 1+x$ e $x \to 0$ allora $y \to 1$ NO

C'è una sostituzione più furba

$$\log(2+x) = \log\left(2\left(1+\frac{x}{2}\right)\right) = \log 2 + \log\left(1+\frac{x}{2}\right) \qquad y = \frac{x}{2} \xrightarrow{x\to 0} 0$$
$$= \log 2 + \log\left(1+\frac{x}{2}\right)$$

Ponendo $y = \frac{x}{2}$

$$\log\left(1+\frac{x}{2}\right) = \log(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + o(y^3)$$
$$= \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{4} + \left(\frac{x^3}{8}\right)\cdot\frac{1}{3} + o(x^3)$$
$$= \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{24} + o(x^3)$$

In conclusione, per $x \to 0$

$$\log(2+x) = \log 2 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{24} + o(x^3).$$