MATEMATICA - LEZIONE 3

venerdì 4 ottobre 2024 11:02

Intervalli:

Dati $a, b \in \mathbb{R}$ denotiamo:

1) $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$

INTERVALLO CHIUSO DI ESTREMI a E b.

2) $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$

INTERVALLO APERTO DI ESTREMI a E b.

3) $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$

INTERVALLO SEMIAPERTO A DESTRA DI ESTREMI a e b

4) $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$

INTERVALLO SEMIAPERTO A SINISTRA DI ESTREMI a e b

5) $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$

SEMIRETTA CHIUSA DI ESTREMO SINISTRO a

6) $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$

SEMIRETTA APERTA DI ESTREMO SINISTRO a

7) $(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$

SEMIRETTA CHIUSA DI ESTREMO DESTRO a

8) $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$

SEMIRETTA APERTA DI ESTREMO DESTRO a

9) $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$ (RETTA REALE)

Notazione:

Su alcuni libri:

(a, b) si indica con $]a, b[$.

$(a, b]$ si indica con $]a, b]$

$[a, b)$ si indica con $[a, b[$

$(a, +\infty)$ si indica con $]a, +\infty[$

$(-\infty, a)$ si indica con $]-\infty, a[$

Tutti gli insiemi hanno un "estremo destro" e un "estremo sinistro". (non solo gli intervalli)

Def: Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme, si definisce **MASSIMO** di A il più grande degli elementi di A. Cioè un numero reale x è il massimo di A se:

1) $x \in A$
2) $\forall\, a \in A: \quad a \leq x$.

(Il massimo di A si indica con $\max A$)

Def: Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme, si definisce **MINIMO** di A il più piccolo degli elementi di A. Cioè un numero reale x è il massimo di A se:

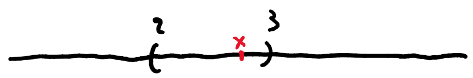
1) $x \in A$
2) $\forall\, a \in A: \quad x \leq a$.

(il minimo di A si indica con $\min A$)

Non tutti gli insiemi hanno un massimo (o un minimo)

$\max\, [2,3] = 3$

ma se consideriamo $(2,3)$ non ha un massimo



Def: Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme non vuoto. Si dice che A è **SUPERIORMENTE LIMITATO** se $\exists\, x \in \mathbb{R}$ tale che $\forall\, a \in A: a \leq x$.
Un numero reale x con questa proprietà si dice un **MAGGIORANTE** per A. L'insieme di tutti i maggioranti di A si indica con $\mathcal{M}(A)$.

ESEMPI

- $A = \{-1, 7, 12\}$ $\quad (\max A = 12)$

  100 è un maggiorante
  15 è un maggiorante
  10 non è un maggiorante
  12 è un maggiorante.
  $\mathcal{M}(A) = [12, +\infty)$

- $A = [0, 30)$.

  100 è un maggiorante
  30 è un maggiorante
  $\mathcal{M}(A) = [30, +\infty)$.

Def: Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme non vuoto.
- Se A è superiormente limitato si definisce ESTREMO SUPERIORE di A il minimo di $\mathcal{M}(A)$. (si indica con $\sup A$)
- Se A non è superiormente limitato, definiamo $\sup A = +\infty$.

TEOREMA (DI ESISTENZA DELL'ESTREMO SUPERIORE)
Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto e superiormente limitato allora $\exists \min \mathcal{M}(A)$.
(Cioè tutti gli insiemi non vuoti hanno un estremo superiore)

Nota il Teorema di esistenza dell'estremo superiore è equivalente alla proprietà di continuità di $\mathbb{R}$.

Def: Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme non vuoto. Si dice che A è INFERIORMENTE LIMITATO se $\exists x \in \mathbb{R}$ t.c. $\forall a \in A$: $x \leq a$.
Un numero x con questa proprietà si dice un MINORANTE di A.
L'insieme dei minoranti di A si indica con $m(A)$.

Def: Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme non vuoto.

- Se A è inferiormente limitato, definiamo ESTREMO INFERIORE di A il massimo di $m(A)$ (si indica con $\inf A$)
- Se A non è inferiormente limitato, definiamo $\inf A = -\infty$

ESEMPI

- $A = [-1, 4)$

$\sup A = 4$ $\quad$ $\nexists \max A$ $\quad$ $\mathcal{M}(A) = [4, +\infty)$

$\inf A = -1$ $\quad$ $-1 = \min A$. $\quad$ $m(A) = (-\infty, -1]$

- $A = \mathbb{N}$:

$\sup \mathbb{N} = +\infty$ ($\mathbb{N}$ non è superiormente limitato)

$\inf \mathbb{N} = 0 = \min \mathbb{N}$

$\mathcal{M}(\mathbb{N}) = \emptyset$

$m(\mathbb{N}) = (-\infty, 0]$.

- $A = \mathbb{Z}$

$\sup \mathbb{Z} = +\infty$ e $\inf \mathbb{Z} = -\infty$

- $A = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\} = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots \right\}$

$\sup A = 1 = \max A$

$\inf A = 0$ e $\nexists \min A$

OSS

1) Se $\exists \max A$, allora $\sup A = \max A$.
2) Se $\exists \min A$, allora $\inf A = \min A$.
3) Se $\sup A \in A$, allora $\exists \max A = \sup A$
4) Se $\inf A \in A$, allora $\exists \min A = \inf A$.

Le definizioni di sup e inf si possono usare per definire le radici di numeri reali.

Per esempio:

$\sqrt{2} := \sup \{ x \in \mathbb{R} \mid x > 0, \ x^2 < 2 \}$

si dimostra che $(\sqrt{2})^2 = 2$.

Def: Sia $y \in \mathbb{R}$, $y \geq 0$. Allora $\exists ! \ x \in \mathbb{R}$ t.c. $x \geq 0$ e $x^2 = y$. Tale numero x si definisce RADICE QUADRATA di y.

Idea: $\sqrt{0} = 0$

e se $y > 0$: $\sqrt{y} := \sup \{ x \in \mathbb{R} \mid x > 0, \ x^2 < y \}$.

OSS Se $y \in \mathbb{R}$, $y \geq 0$, allora $\sqrt{y}$ e $-\sqrt{y}$ sono gli unici numeri reali il cui quadrato è y (sono diversi se $y \neq 0$).

Ricordare:

- $\sqrt{y}$ è definita solo per $y \geq 0$.
- $\sqrt{y} = 0 \iff y = 0$
- $\sqrt{y} \geq 0 \quad \forall \ y \in \mathbb{R}, \ y \geq 0$.
- $\sqrt{y} > 0 \quad \forall \ y \in \mathbb{R}, \ y > 0$.

Def: Sia $y \in \mathbb{R}$, $y \geq 0$ e sia $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ pari. Allora $\exists ! \ x \in \mathbb{R}$ t.c. $x \geq 0$ e $x^n = y$. Tale x si dice RADICE n-ESIMA di y e si indica con $\sqrt[n]{y}$

Def: Sia $y \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, n dispari. Allora $\exists ! \ x \in \mathbb{R}$ (x ha lo stesso segno di y) tale che $x^n = y$. Tale x si dice RADICE n-ESIMA di y e si indica con $\sqrt[n]{y}$.

ESEMPI

$\sqrt[3]{8} = 2$

$\sqrt[4]{81} = 3$

$\sqrt[4]{-16} \nexists$

$\sqrt[3]{-27} = -3$

$\sqrt[4]{(-2)^4} = 2 \qquad \left(\sqrt[4]{(-2)^4} = \sqrt[4]{16} = 2 \right)$

$\sqrt[5]{4^5} = 4$

$\sqrt[7]{(-10)^7} = -10$

OSS

Sia $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ e $x \in \mathbb{R}$:

1) Se n è dispari $\sqrt[n]{x^n} = x$

2) Se n è pari $\sqrt[n]{x^n} = x$ solo se $x \geq 0$.

Sup e inf si usano anche per definire π ed e

- NUMERO DI NEPERO

$$e := \sup \left\{ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\setminus\{0\} \right\}$$

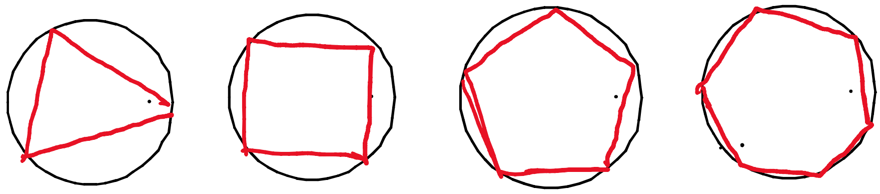
$$e = 2,7182 \ldots\ldots$$

$$A = \left\{ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\setminus\{0\} \right\}$$
$$= \left\{ 2, \left(\frac{3}{2}\right)^2, \left(\frac{4}{3}\right)^3, \left(\frac{5}{4}\right)^4, \ldots\ldots \right\}$$

$e = \sup A$.

- π è il rapporto tra lunghezza di una circonferenza e il suo diametro.

Cos'è la lunghezza di una circonferenza ?



Se P_n il perimetro del poligono con n lati inscritto nella circonferenza, allora possiamo definire la lunghezza della circonferenza come

$$\sup\{P_n \mid n \in \mathbb{N},\ n \geq 3\}$$

$$\pi = 3,1415....$$

Valore assoluto

Def: Sia $x \in \mathbb{R}$, definiamo VALORE ASSOLUTO di x la quantità

$$|x| := \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$|2| = 2$

$|-3| = 3$

$|-\pi| = \pi$

$\left|-\frac{1}{\sqrt{3}}\right| = \frac{1}{\sqrt{3}}$

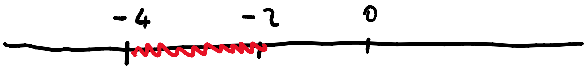
$|e| = e$

OSS

- $\sqrt{x^2} = |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, pari e $x \in \mathbb{R}$:
  $\sqrt[n]{x^n} = |x|$
- $n \in \mathbb{N}$, n dispari e $\forall x \in \mathbb{R}$
  $\sqrt[n]{x^n} = x$.

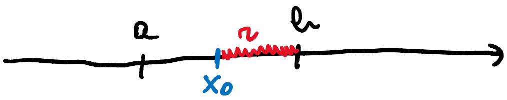
- $|x|$ rappresenta la lunghezza sulla retta reale del segmento tra 0 e x

- Più in generale dati $x, y \in \mathbb{R}$, $|x-y|$ rappresenta la distanza tra x e y sulla retta reale.



$$|-4-(-2)| = |-4+2| = |-2| = 2.$$

- Gli intervalli (a,b) e $[a,b]$ si possono rappresentare usando il valore assoluto



$$x_0 = a + \frac{b-a}{2} = \frac{2a+b-a}{2} = \frac{a+b}{2}$$

$$r = \frac{b-a}{2}$$

Allora

$$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-x_0| < r\} = (x_0-r, x_0+r)$$
$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-x_0| \le r\} = [x_0-r, x_0+r]$$

- PROPRIETÀ DEL VALORE ASSOLUTO

1) $\forall x \in \mathbb{R} : |x| \ge 0$
2) $\forall x \in \mathbb{R} : |x| = 0 \iff x = 0$
3) $\forall x, y \in \mathbb{R} : |xy| = |x|\,|y|$
4) $\forall x, y \in \mathbb{R},\ y \ne 0 \quad \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$
5) $\forall x, y \in \mathbb{R} : |x+y| \le |x| + |y|.$
6) $\forall x, y \in \mathbb{R} : |x-y| \le |x| + |y|$
7) $\forall x \in \mathbb{R} : |-x| = |x|$
8) $\forall x, y \in \mathbb{R} : |x| \le y \iff -y \le x \le y \iff \begin{cases} x \le y \\ -y \le x \end{cases}$ e
9) $\forall x, y \in \mathbb{R} : |x| \ge y \iff x \ge y \ \vee\ x \le -y$

Potenze:

Se $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ e $x \in \mathbb{R}$: $\quad x^n = x \cdot x \cdot \ldots \cdot x$ (n volte)

Se $n = 0$ e $x \ne 0$: $\quad x^0 = 1$

Se $m \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ e $x \ne 0$: $\quad x^{-m} := \dfrac{1}{x \cdot x \ldots \cdot x}$ ($-m$ volte)

$\left(\text{cioè } x^{-n} = \frac{1}{x^n} \right)$

Def (Potenze con esponente razionale).

Se $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$ e $q = \frac{n}{m}$ con $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$.

Definiamo $x^q = x^{\frac{n}{m}} := \sqrt[m]{x^n}$

Se inoltre $x \neq 0$ definiamo $x^{-q} := \frac{1}{x^q}$

$$2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

$$2^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

$$2^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{2^4} = \sqrt[3]{16}$$

$$10^{-\frac{5}{2}} = \frac{1}{10^{\frac{5}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{10^5}} = \frac{1}{\sqrt{100000}}$$

Attenzione: Non usate $x^{\frac{n}{m}}$ se $x < 0$.

$x^{\frac{n}{m}}$ non è ben definito se $x < 0$.

$$(-1)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-1} = -1$$

$$\parallel$$

$$(-1)^{\frac{1}{3}} = (-1)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-1)^2} = \sqrt[6]{1} = 1$$

! problema!

Potenze con esponente reale non razionale

Cosa vuol dire 2^{π} ?

Def: Sia $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$ e sia $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $a > 0$.

Se $x \geq 1$ definiamo $x^a := \sup \{ x^q \mid 0 < q < a, q \in \mathbb{Q} \}$

Se $0 < x < 1$ definiamo $x^a := \inf \{ x^q \mid 0 < q < a, q \in \mathbb{Q} \}$.