# MATEMATICA - LEZIONE 29

lunedì 25 novembre 2024 09:05

# Teorema di De L'Hopital

Serve per calcolare limiti del tipo $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ nel caso in cui ci sia una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$ o $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

## TEOREMA DI DE L'HOPITAL

Sia $I$ un intervallo e sia $x_0 \in Dr(I)$. Siano $f, g : I \setminus \{x_0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ tali che:

1) $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$ e $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$
   ($o$ $\lim_{x \to x_0} f(x) \in \{+\infty, -\infty\}$ e $\lim_{x \to x_0} g(x) \in \{+\infty, -\infty\}$)
2) $f$ e $g$ sono derivabili in $I \setminus \{x_0\}$.
3) $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in I \setminus \{x_0\}$
4) $\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R}^*$

Allora $\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L \quad \left( = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \right)$

## ESEMPI

1) $\lim_{x \to 1} \frac{x^4 + 5x - 6}{x - 1}$ $\quad \frac{0}{0}$ f.i.

$$\overset{D.L.H}{=} \lim_{x \to 1} \frac{4x^3 + 5}{1} = 9$$

2) $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x-3}$ $\quad \frac{+\infty}{+\infty}$

$\overset{D.L.H}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{1} = \lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty.$

Il teorema permette di verificare tutti i limiti notevoli

3) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \overset{D.L.H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = \lim_{x \to 0} \cos x = \cos 0 = 1$

4) $\lim_{x \to 0} \underbrace{\frac{1-\cos x}{x^2}}_{f.i.\ \frac{0}{0}} \overset{D.L.H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{2} \cdot 1$

$= \frac{1}{2}$

5) $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} \overset{D.L.H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{e^x}{1} = \lim_{x \to 0} e^x = e^0 = 1.$

6) $\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} \overset{D.L.H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\alpha(1+x)^{\alpha-1} \cdot 1}{1} = \lim_{x \to 0} \alpha(1+x)^{\alpha-1}$

$= \alpha \cdot 1^{\alpha-1} = \alpha$

A volte può essere necessario utilizzare il teorema più di una volta

7) $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{(e^x-1)^2}$ $\quad f.i.\ \frac{0}{0}$

$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{2(e^x-1) \cdot e^x}$ $\quad f.i.\ \frac{0}{2 \cdot 0 \cdot 1} = \frac{0}{0}$

$\overset{D.L.H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{2(e^x \cdot e^x + (e^x - 1) \cdot e^x)} = \frac{1}{2(1 \cdot 1 + 0 \cdot 1)}$

$= \frac{1}{2}$

Le forme indeterminate del tipo $\pm\infty \cdot 0$ si possono trasformare in forme indeterminate a cui si applica il teorema di D.l'H.:

8) $\lim_{x \to 0^+} x \ln x$ $\quad 0 \cdot (-\infty)$ f.i. $\quad x = \frac{1}{\frac{1}{x}}$

$= \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$ $\quad \frac{1}{x} \to +\infty$ $\quad$ f.i. $\frac{-\infty}{+\infty}$

$\overset{D.L.H}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \cdot (-x^2)$

$= \lim_{x \to 0^+} -x = 0.$

**Ricordare**

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$ e $\log_2 x = \frac{1}{x \ln 2}$

**Attenzione:** Si applica solo alle forme indeterminate del tipo $\frac{0}{0}$ e $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ (o f.i riconducibili a questi come $\infty \cdot 0$)

ESEMPIO

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin x}{x}$ $\quad$ ($\nexists \lim_{x \to +\infty} \sin x$ e $\lim_{x \to +\infty} x = +\infty$ non è una f.i. del tipo $\frac{0}{0}$ e $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$)

Abbiamo visto che $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$ (Teor. dei carabinieri).

Se proviamo a usare D.L.H. otteniamo un risultato non corretto

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin x}{x} \overset{?}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{\cos x}{1} \quad \nexists \quad ?$

Il teorema non si può applicare.

ESEMPIO

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\arctan x}{\frac{1}{x}} = \frac{\frac{\pi}{2}}{0^+} = +\infty$$

Non è una forma indeterminata. Se applichiamo il teorema si sbaglia:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to +\infty} -\frac{x^2}{1+x^2} = -1 \quad \text{SBAGLIATO!}$$

---

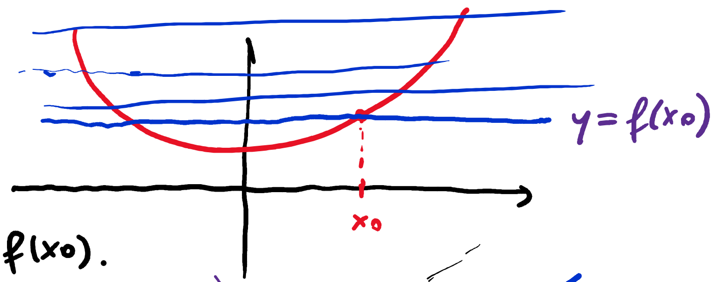
## Polinomi di Taylor.

Idea: Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in \mathbb{R}$.
Vogliamo trovare il polinomio di grado $\leq n$ che approssima meglio il grafico di $f$ vicino al punto $x_0$.

- $n = 0$

  $P(x) = c$

  Il polinomio migliore è $p(x) = f(x_0)$.

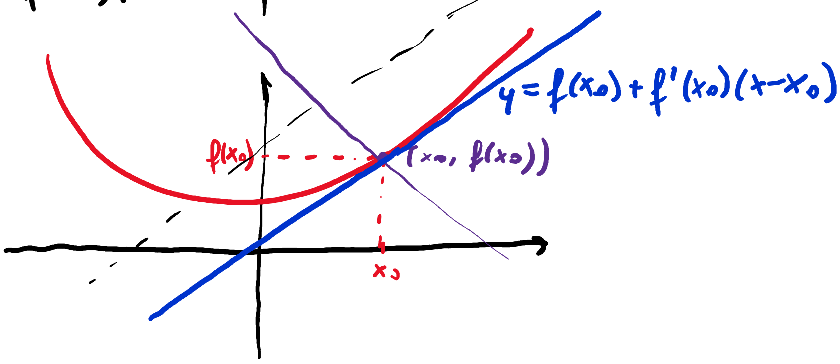



- $n = 1$

  $P(x) = mx + q$

Il polinomio migliore è

$$P(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$



OSS

$p(x_0) = f(x_0)$

$p'(x) = f'(x_0)$ in particolare $p(x_0) = f(x_0)$ e $p'(x_0) = f'(x_0)$.

- $n = 2$.

Il polinomio di grado $\leq 2$ che approssima meglio $f$ è quello che ha lo stesso valore di $f$ in $x_0$, la stessa derivata di $f$ in $x_0$ e la stessa derivata seconda di $f$ in $x_0$. Cioè:

$$p(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2$$

Infatti:

$p'(x) = f'(x_0) + f''(x_0)(x - x_0)$

$p''(x) = f''(x_0)$

Quindi $p(x_0) = f(x_0)$, $p'(x_0) = f'(x_0)$, $p''(x_0) = f''(x_0)$.

- $n = 3$: Come per i casi precedenti si dimostra che il polinomio di grado $\leq 3$ che approssima meglio il grafico di $f$ è:

$$p(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \frac{1}{6} f'''(x_0)(x - x_0)^3$$

Per poter definire rigorosamente i polinomi di Taylor di ogni ordine ci servono diverse nozioni preliminari.

# Fattoriale di un numero naturale

**Def:** Sia $n \in \mathbb{N}$, si definisca FATTORIALE di $n$ la quantità

$$n! := \begin{cases} n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 & \text{se } n \geq 1 \\ 1 & \text{se } n = 0. \end{cases}$$

ESEMPI

$0! = 1$

$1! = 1$

$2! = 2 \cdot 1 = 2$

$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

$5! = 5 \cdot 4! = 5 \cdot 24 = 120$

OSS

$$\forall n \in \mathbb{N} : (n+1)! = (n+1) \cdot n!$$

**OSS** (derivate delle potenze)

$f(x) = x^n$

$f'(x) = n x^{n-1}$

$f''(x) = n(n-1) x^{n-2}$

$f'''(x) = n(n-1)(n-2) x^{n-3}$

$\vdots$

$f^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2) \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!$

**OSS 2** Più precisamente $\forall n, k \in \mathbb{N}$: se $f(x) = (x - x_0)^n$, allora:

$$f^{(k)}(x) = \begin{cases} n! & \text{se } k = n \\ 0 & \text{se } k > n \\ \dfrac{n!}{(n-k)!}(x - x_0)^{n-k} & \text{se } k < n \end{cases}$$

---

# Simboli di sommatoria e produttoria

**Def**: Siano $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ con $k_1 \leq k_2$ e sia $f: \mathbb{Z} \cap [k_1, k_2] \longrightarrow \mathbb{R}$ definiamo

$$\sum_{k=k_1}^{k_2} f(k) := f(k_1) + f(k_1+1) + f(k_1+2) + \dots + f(k_2).$$

(SOMMATORIA)

$$\prod_{k=k_1}^{k_2} f(k) := f(k_1) \cdot f(k_1+1) \cdot f(k_1+2) \cdot \dots \cdot f(k_2).$$

(PRODUTTORIA)

ESEMPIO

$$\sum_{k=2}^{5} \frac{1}{k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$$

$$\sum_{h=2}^{m} \frac{1}{h} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{m}.$$

$$\sum_{h=-1}^{3} 2^h = 2^{-1} + 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3$$

$$= \frac{1}{2} + 1 + 2 + 4 + 8 = \frac{31}{2}$$

$$\prod_{k=1}^{4} k^2 = 1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2$$

$$\prod_{k=1}^{m} k = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot m = m!$$

---

## Simboli di Landau ("o piccolo")

**Def**: Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e $x_0 \in D(I)$.
Siano $f, g: I \longrightarrow \mathbb{R}$ con $g(x) \neq 0 \ \forall x \in I \setminus \{x_0\}$
Si scrive che $f(x) = o(g(x))$ per $x \to x_0$ se.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

($f(x)$ è trascurabile rispetto a $g(x)$ per $x \to x_0$)

ESEMPIO

- Se $x \to +\infty$ $f(x) = x$ e $g(x) = e^x$.

  Sappiamo che $x = o(e^x)$ per $x \to +\infty$.

  cioè $\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$

- Per $x \to +\infty$, $x$ e $x^2$.

  Per $x \to +\infty$ $x = o(x^2)$.

  perché $\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$

- $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x + x^2 + x}{e^x + 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x + o(e^x)}{e^x + o(e^x)} = 1.$

  $\left( \frac{e^x \left(1 + \frac{x^2 + x}{e^x} \xrightarrow{} 0\right)}{e^x \left(1 + \frac{1}{e^x}\right)} \right.$ cioè $x^2 + x = o(e^x)$ $\left. \right)$

- Se $x \to 0$, consideriamo $x$ e $x^2$.

  Possiamo dire che $x^2 = o(x)$ infatti se

  $x \to 0$ $\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \to 0} x = 0.$

- $\lim_{x \to 0} \frac{x + 2x^4}{\sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{x + o(x)}{\sin x} =$

  $= \lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\frac{\sin x}{x}} = 1.$

- Ricordare. Se $n, m \in \mathbb{N}$ e $n < m$. Allora $x^m = o(x^n)$. Cioè $x^n$ è la parte principale e $x^m$ è trascurabile rispetto a $x^n$.

**OSS**

I limiti notevoli si possono riscrivere usando i simboli di Landau:

- $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \iff \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} - 1 = 0$

$$\iff \lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x} = 0$$

cioè $\sin x - x = o(x)$

$\sin x = x + o(x).$

- $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

$$\iff \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} - \frac{1}{2} = 0$$

$$\iff \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x - \frac{1}{2}x^2}{x^2} = 0$$

cioè $1 - \cos x - \frac{1}{2}x^2 = o(x^2)$

$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 - o(x^2)$

$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$

**PROPRIETÀ DEI SIMBOLI DI LANDAU**

1) Se $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $\quad c\, o(f(x)) = o(f(x))$
   e $o(c f(x)) = o(f(x))$.
2) In particolare $\pm o(f(x)) = o(f(x))$.
3) $o(f(x)) + o(f(x)) = o(f(x))$
4) $g(x)\, o(f(x)) = o(f(x)\, g(x))$
5) $o(f(x))\, o(g(x)) = o(f(x)\, g(x))$
6) $o(o(f(x))) = o(f(x))$

Nota:

per $x \to 0$ $\quad x^2 = o(x)$

$$x + 2x^2 = x + \underline{2\,o(x)}$$

oppure

$$x + \underline{o}(x)$$

---

**Def**: Sia $f: I \to \mathbb{R}$ con $I$ intervallo. Sia $x_0 \in I$ e supponiamo che $f$ sia derivabile $n$ volte $(n \in \mathbb{N})$ in $x_0$. Definiamo POLINOMIO DI TAYLOR DI $f$ DI ORDINE $n$ E DI CENTRO $x_0$ il polinomio

$$T_{n,f,x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x-x_0)^2 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$$

**OSS** Per definizione si ha che:

$$T^{(k)}_{n,f,x_0}(x_0) = f^{(k)}(x_0) \qquad \forall\, 0 \le k \le n.$$

TEOREMA DI PEANO (FORMULA DI TAYLOR CON RESTO DI PEANO)

Sia $I$ intervallo e siano $x_0 \in I$ e $f: I \to \mathbb{R}$ una funzione. Se $f$ è derivabile $n$ volte in $x_0$ allora

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - T_{n,f,x_0}(x)}{(x-x_0)^n} = 0$$

cioè $\quad f(x) = T_{n,f,x_0}(x) + o((x-x_0)^n)$