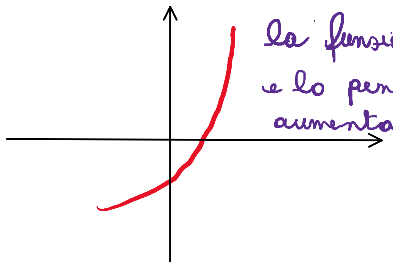
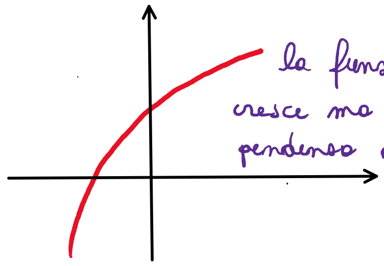
Lezione 26

lunedì 18 novembre 2024 09:02



la funzione cresce e la pendenza aumenta

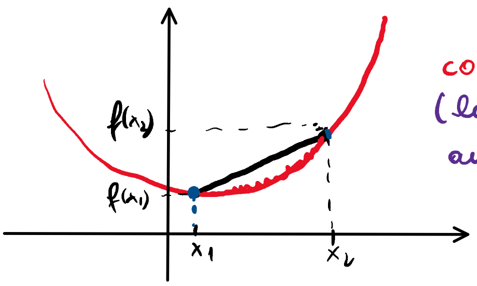


la funzione cresce ma la pendenza diminuisce

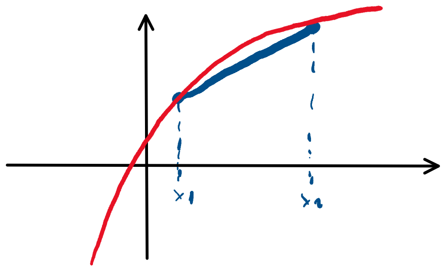
Def Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e sia $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$.
Si dice che f è **CONVESSA** in I se $\forall\, x_1, x_2 \in I$ e $\forall\, \lambda \in [0,1]$ si ha:

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2).$$

Si dice che f è **CONCAVA** in I se $\forall\, x_1, x_2 \in I$ e $\forall\, \lambda \in [0,1]$ si ha $f(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$



CONVESSA
(la "pendenza" del grafico aumenta)



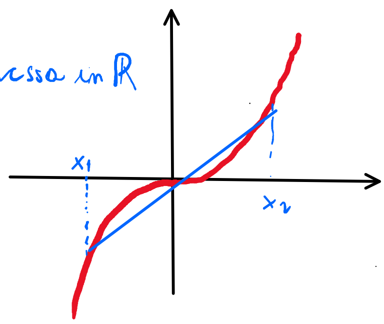
CONCAVA
(la pendenza del grafico diminuisce)

Nota: Ci sono funzioni che non sono concave né convesse

f non è concava né convessa in $\mathbb{R}$

MA

- è convessa in $[0, +\infty)$
- è concava in $(-\infty, 0]$



La convessità / concavità di una funzione dipende dalla derivata seconda

Def Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e sia $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$. Se f è derivabile in I allora f' è una funzione su I $f': \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f'(x) \end{array}$.
Se f' è derivabile in un punto $x \in I$, si dice che f è DUE VOLTE DERIVABILE in x e la derivata di f' si dice DERIVATA SECONDA DI f in x. La derivata seconda si può indicare con $f''(x)$, $\frac{d^2}{dx^2}f(x)$, $\ddot{f}(x)$, $f^{(2)}(x)$, $D^{(2)}f(x)$.

ESEMPI

$$f(x) = x^7 + 3x^2 + 2$$
$$f'(x) = 7x^6 + 6x$$
$$f''(x) = 42x^5 + 6$$

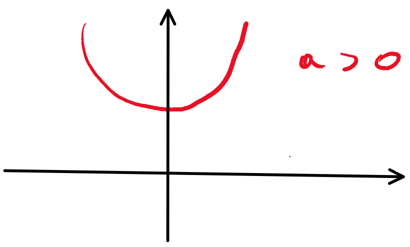
TEOREMA (CARATTERIZZAZIONE DELLA CONVESSITÀ).
Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e sia $f: I \to \mathbb{R}$ due volte derivabile in I. Allora sono equivalenti:

1) f convessa in I (risp. concava in I)
2) f' monotona crescente in I (risp. decrescente in I)
3) $\forall x \in I$: $f''(x) \geq 0$ (risp. $f''(x) \leq 0$ $\forall x \in I$)

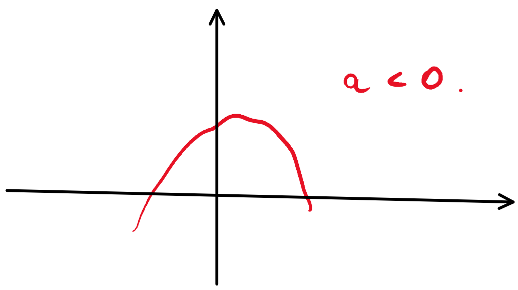
ESEMPI

1) $f(x) = ax^2 + bx + c$
$f'(x) = 2ax + b$
$f''(x) = 2a$

- Se $a > 0$ f è convessa in $\mathbb{R}$
- Se $a < 0$ f è concava in $\mathbb{R}$



$a > 0$



$a < 0$.

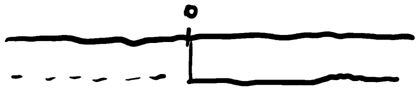
2) $f(x) = x^5$

$f'(x) = 5x^4$

$f''(x) = 20\,x^3$

Segno di f'':

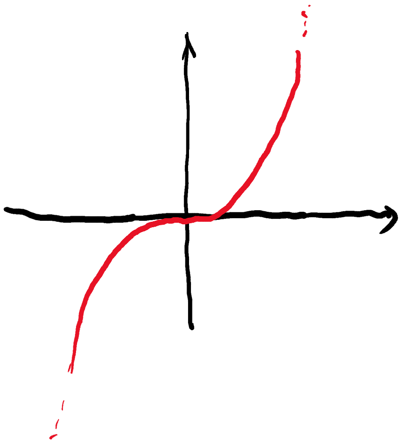
$x^3 > 0 \iff x > 0$



$-$ (concava) $\quad$ $+$ (convessa)

f è convessa per $x > 0$

f è concava per $x < 0$.

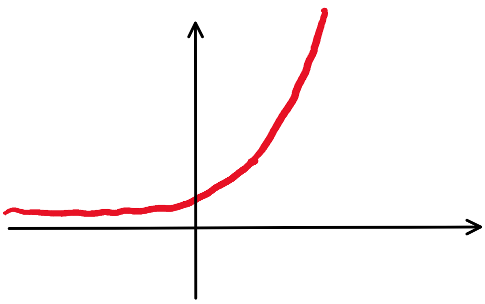


3) $f(x) = e^x$

$f'(x) = e^x$

$f''(x) = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

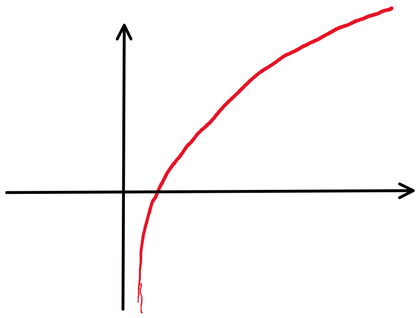
f è convessa in $\mathbb{R}$.



4) $f(x) = \ln x$

$f'(x) = \dfrac{1}{x}$

$f''(x) = -\dfrac{1}{x^2} \leq 0 \quad \forall x \in (0, +\infty)$



Def: Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione. Si dice che la retta $y = y_0$ è un ASINTOTO ORIZZONTALE per f per $x \to +\infty$ (o per $x \to -\infty$) se $\lim_{x \to +\infty} f(x) = y_0$.

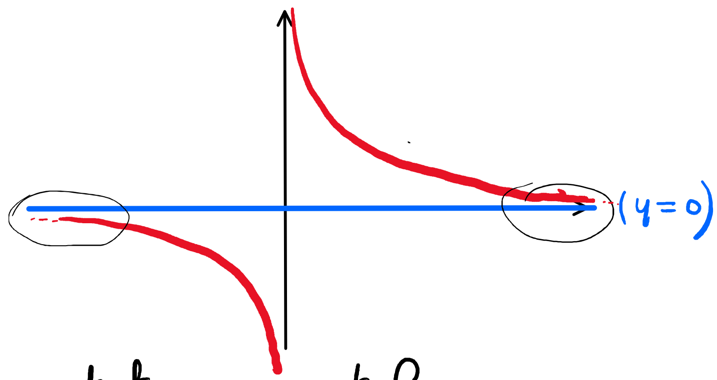
(o $\lim_{x \to -\infty} f(x) = y_0$).

ESEMPI

$f(x) = \frac{1}{x}$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad (= 0^+)$

$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad (= 0^-)$



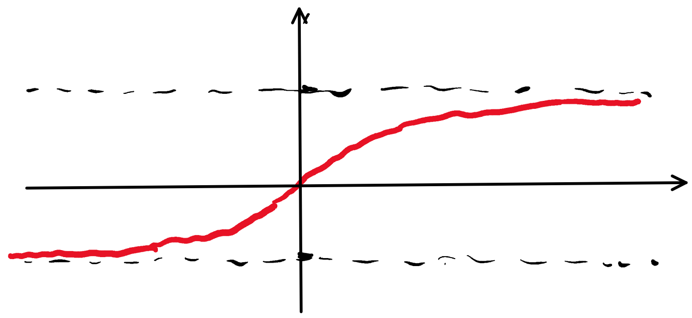
La retta $y=0$ è un asintoto orizzontale per $x \to +\infty$ e per $x \to -\infty$

ESEMPIO

$f(x) = \arctan x$

$\lim_{x \to +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$

$\lim_{x \to -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$



$y = \frac{\pi}{2}$ è asint. oriz. per $x \to +\infty$

$y = -\frac{\pi}{2}$ è asint. oriz. per $x \to -\infty$.

ESEMPIO

$f(x) = e^x$

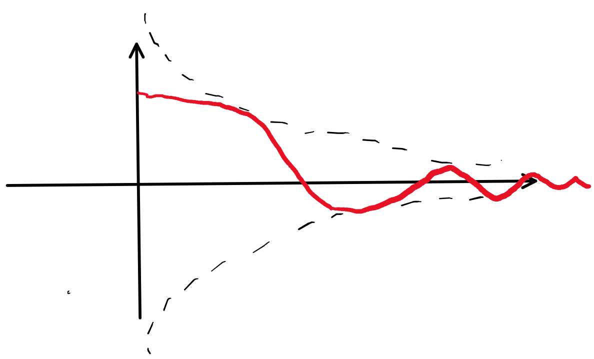
$y=0$ è asint. orizz. per $x \to -\infty$

Non c'è asint. orizz. per $x \to +\infty$.

ESEMPIO

$f(x) = \frac{\sin x}{x}$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$



$y=0$ è asint orizzontale per $x \to +\infty$

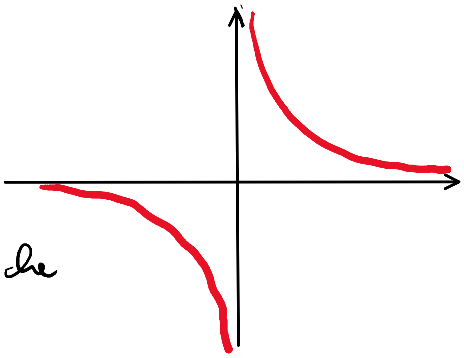
Def: Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e sia $f: I \to \mathbb{R}$.

- Sia $x_0 \in D_r^+(I) \cap \mathbb{R}$. Si dice che la retta $x = x_0$ è un ASINTOTO VERTICALE DA DESTRA se $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$ o $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$.

- Sia $x_0 \in D_r^-(I)$. Si dice che la retta $x = x_0$ è un ASINTOTO VERTICALE SINISTRO se $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$ o $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$.

ESEMPIO

$f(x) = \frac{1}{x}$



$x = 0$ è asint. verticale sia da destra che da sinistra. Infatti:

$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ e $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

Asintoti obliqui

Def: Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e siano $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $q \in \mathbb{R}$. Si dice che la retta $y = mx + q$ è un ASINTOTO OBLIQUO per f per $x \to +\infty$ (o per $x \to -\infty$):

1) $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

2) $\lim_{x \to +\infty} f(x) - mx = q \in \mathbb{R}$

ESEMPIO

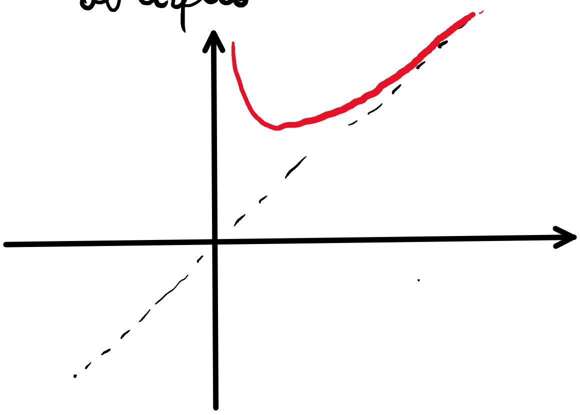
$f(x) = x + \frac{1}{x}$ per $x \to +\infty$

- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ no asintoti orizzontali.

$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x + \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \to +\infty} 1 + \frac{1}{x^2} = 1$ $(= m)$

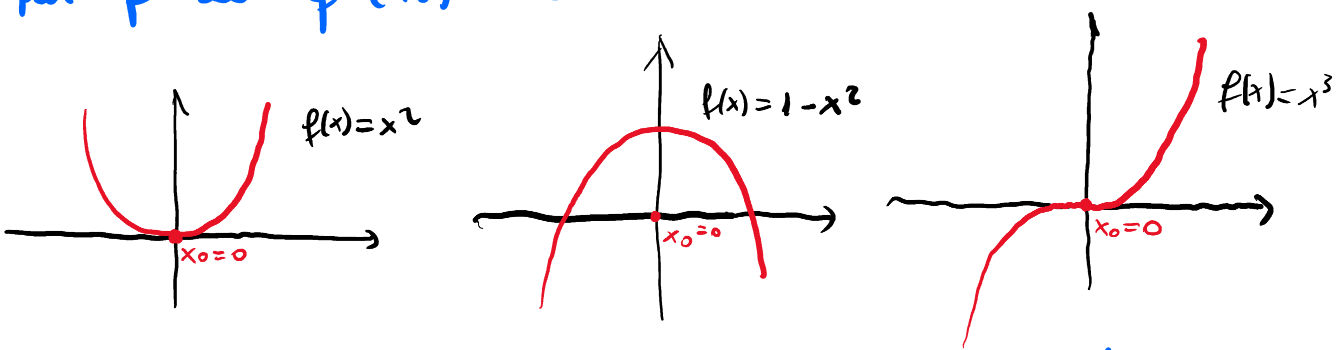
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - mx = \lim_{x\to+\infty} \cancel{x} + \frac{1}{x} - \cancel{1\cdot x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 \ (=q)$$

Quindi $y = x$ $(y = 1\cdot x + 0)$ è un asintoto obliquo



Punti stazionari e segno della derivata

Def: Sia $f: I \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile in I. Un punto $x_0 \in I$ si dice PUNTO STAZIONARIO (o CRITICO) per f se $f'(x_0) = 0$.



OSS Sia f una funzione derivabile in un intervallo I

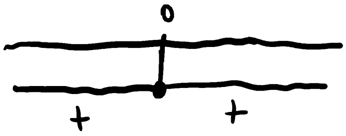
1) Se $f'(x_0)=0$, $f'>0$ $\forall x > x_0$ e $f'<0$ $\forall x<x_0$, allora. allora x_0 è un punto di minimo (locale) in I.

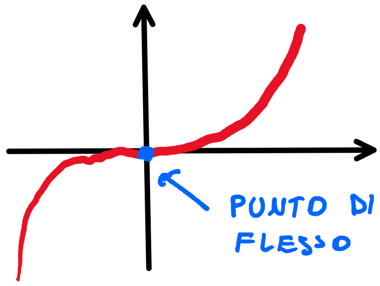
2) Se $f'(x_0)=0$, $f'<0$ $\forall x > x_0$ e $f'>0$ $\forall x<x_0$, allora x è un punto di massimo (locale) per f in I

3) Se $f'(x_0) = 0$, x_0 è interno ad I e $\forall x \in I\setminus\{x_0\}$ $f'(x)>0$ (o $\forall x \in I \setminus \{x_0\}$, $f'(x)<0$) allora x_0 non è né un max né un min. Si dice che x_0 è un PUNTO DI FLESSO A TANGENTE ORIZZONTALE.

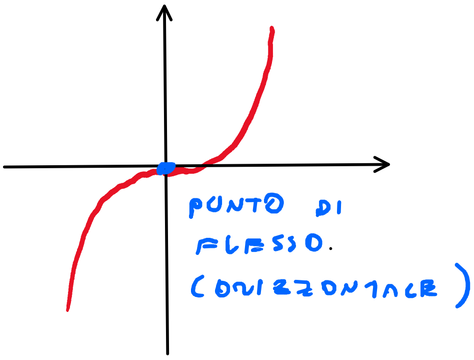
$f(x) = x^3$

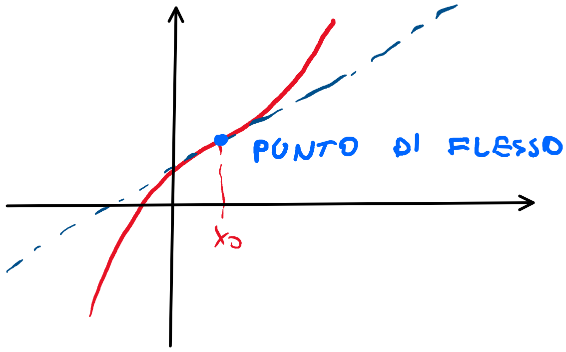
$f'(x) = 3x^2$





Def: Sia $f: I \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile in I. Sia $x_0 \in I$. Se f è convessa per $x > x_0$ e concava per $x < x_0$ si dice che x_0 è un PUNTO DI FLESSO





OSS (CARATTERIZZAZIONE DEI PUNTI STAZIONARI TRAMITE DERIVATA SECONDA)

- Se $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) > 0$, allora x_0 è un punto di min locale.
- Se $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) < 0$, allora x_0 è un punto è un punto di max locale.
- Se $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) = 0$ non si può dire nulla (x_0 può essere max, min o flesso).

Studio di funzioni

1) Dominio
2) Simmetrie o periodicità (pari / dispari / periodica)
3) Segno (se si riesce)
4) Altre informazioni utili)
   (intersezioni con assi / f è limitata, etc.)

5) Limiti agli estremi del dominio / studio della continuità / asintoti.

6) Derivabilità e calcolo della derivata prima

7) Segno della derivata prima / monotonia

8) Punti di max / min assoluto.

9) Derivata seconda e convessità (se richiesto).

10) Grafico.

ESEMPIO

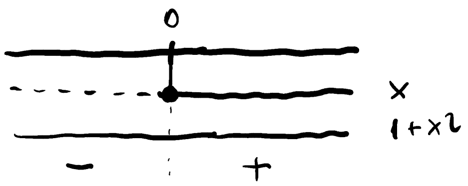
$$f(x) = \frac{x}{1+x^2}$$

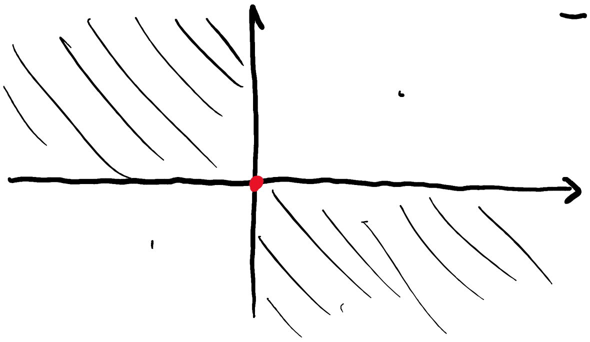
1) Dominio: $\mathbb{R}$ $\qquad (1+x^2 \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R})$

2) $f(-x) = \dfrac{-x}{1+(-x)^2} = \dfrac{-x}{1+x^2} = -f(x)$ f è dispari.

3) Segno di f:

$$\frac{x}{1+x^2} > 0$$





4) Altro:

$f(0) = 0$ $\qquad (0,0)$ appartiene al grafico.

<u>Nota</u>: Come si trovano le intersezioni con gli assi?

- Intersezione asse y

Basta calcolare $f(0)$. Il punto $(0, f(0))$ è

l'intersezione del grafico con l'asse x.
Ha senso trovarlo solo se $0 \in Dom(f)$.

- Intersezioni asse x

Sono i punti $(x_0, f(x_0))$ dove $f(x_0)=0$
(si risolve l'eq. $f(x)=0$).

Nel nostro caso $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$

- $\underbrace{f(0) = 0}$ $\Leftrightarrow$ $(0,0)$ è int. del grafico con l'asse y

$f(x) = \frac{x}{1+x^2} \Rightarrow f(0) = \frac{0}{1+0^2} = \frac{0}{1} = 0$

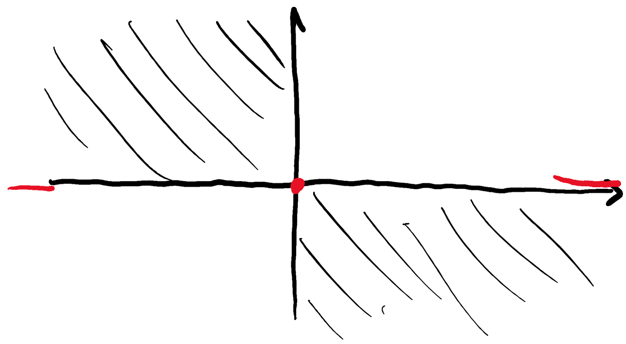
$f(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$. Quindi $(0,0)$ è anche l'unica int. con l'asse delle x.

5) $Dom(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$.

- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{1+x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0.$

- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$

$y = 0$ è un asintoto orizzontale sia per $x \to +\infty$ che per $x \to -\infty$



6) Derivata:

$$f'(x) = \left(\frac{x}{1+x^2}\right)' = \frac{1 \cdot (1+x^2) - 2x \cdot x}{(1+x^2)^2}$$

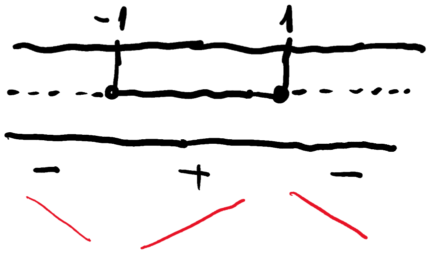
$$= \frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

7) segno di f'

$$f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

$1-x^2 \geq 0 \iff -1 < x < 1$

$(1+x^2)^2 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$



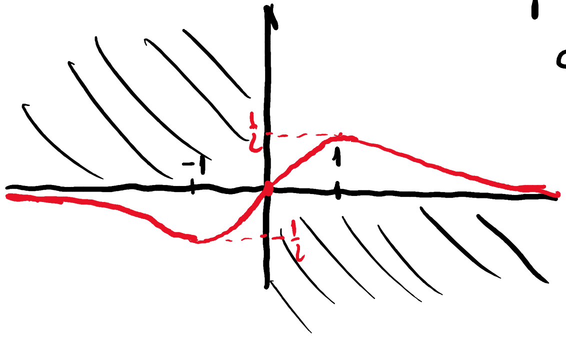
8) In $x=-1$ c'è un minimo locale

In $x=1$ c'è un max locale

$f(1) = \frac{1}{2}$

$f(-1) = -\frac{1}{2}$

10) Saltiamo per il momento la convessità e disegniamo il grafico con le informazioni che abbiamo.



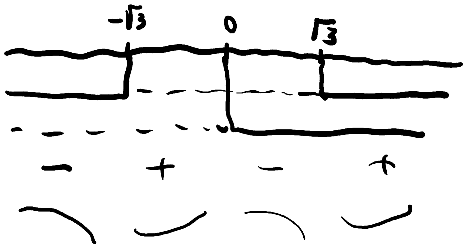
9) $f''(x) = \left(\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \right)'$

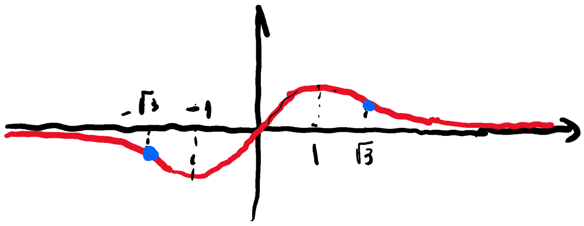
$$= \frac{-2x(1+x^2)^2 - (1-x^2)\,2(1+x^2)\cdot 2x}{(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{(1+x^2)\left(-2x(1+x^2) - 4x(1-x^2)\right)}{(1+x^2)^4}$$

$$= \frac{-2x - 2x^3 - 4x + 4x^3}{(1+x^2)^3}$$

$$= \frac{2x^3 - 6x}{(1+x^2)^3} = \frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$$





In $x = \sqrt{3}$ e $x = -\sqrt{3}$ ci sono dei punti di flesso.