LEZIONE 25

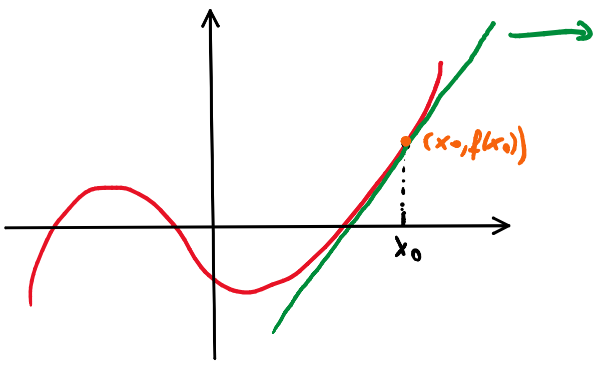
venerdì 15 novembre 2024 11:05

Def: Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e sia $f: I \to \mathbb{R}$ una funzione. Sia $x_0 \in I$. Si dice che f è **DERIVABILE** in x_0 se esiste finito il limite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Tale limite si dice **DERIVATA** di f in x_0 e si indica con $f'(x_0)$.

Ricordare: la derivata di f in x_0 è il coefficiente angolare della retta tangente al grafico di f in $(x_0, f(x_0))$.



Equazione $y = mx + q$ con $m = f'(x_0)$

Più precisamente

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Derivate di alcune funzioni elementari

- $\frac{d}{dx} c = 0 \quad \forall c \in \mathbb{R}$
- $\frac{d}{dx} x = 1$
- $\frac{d}{dx} x^\alpha = \alpha x^{\alpha - 1}$
- $\frac{d}{dx} \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
- $\frac{d}{dx} e^x = e^x$
- $\frac{d}{dx} a^x = a^x \log a$
- $\frac{d}{dx} \log x = \frac{1}{x}$
- $\frac{d}{dx} \log_a x = \frac{1}{x \log a}$
- $\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$
- $\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$
- $\frac{d}{dx} \tan x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
- $\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1 + x^2}$
- $\frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
- $\frac{d}{dx} \arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

Regole per il calcolo delle derivate

1) $\left(f(x)+g(x)\right)' = f'(x) + g'(x)$

2) $\left(f(x)-g(x)\right)' = f'(x) - g'(x)$

3) $\left(c\, f(x)\right)' = c\, f'(x)$

4) $\left(f(x)\, g(x)\right)' = f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x)$

5) $$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\, g(x) - f(x)\, g'(x)}{g(x)^2}$$

6) $$\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = -\frac{g'(x)}{g(x)^2}$$

7) $\left(g(f(x))\right)' = g'(f(x))\, f'(x)$

8) $$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'(y)\big|_{y=f^{-1}(x)}}$$

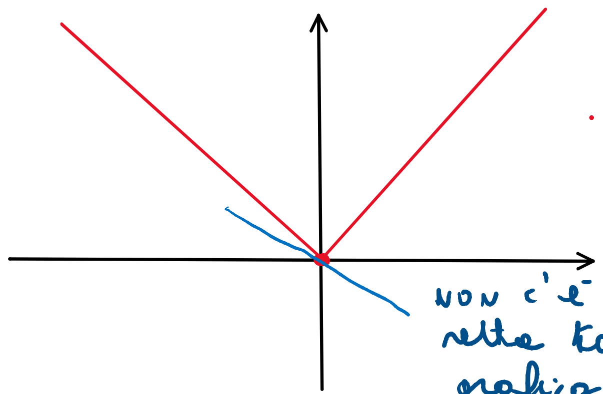
Esempi di funzione non derivabile.

ESEMPIO

$f(x) = |x|$

$f'(x) = \frac{x}{|x|}$ se $x \neq 0$

e in $x=0$?



non c'è una retta tangente al grafico in $(0,0)$.

In 0:

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|-|0|}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h} \not\exists$$

perché

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = \lim_{h\to 0^+} 1 = 1$$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = -1$$

f non è derivabile in 0.

Def: Sia $f: I \to \mathbb{R}$, I intervallo. Sia $x_0 \in I \cap D_r^+(I)$ si definisce DERIVATA DESTRA di f in x_0 la quantità

$$f'_+(x_0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}.$$

Se $x_0 \in I \cap D_r^-(I)$ si definisce DERIVATA SINISTRA di f in x_0 la quantità $f'_-(x_0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}.$

Se $f(x) = |x|$.

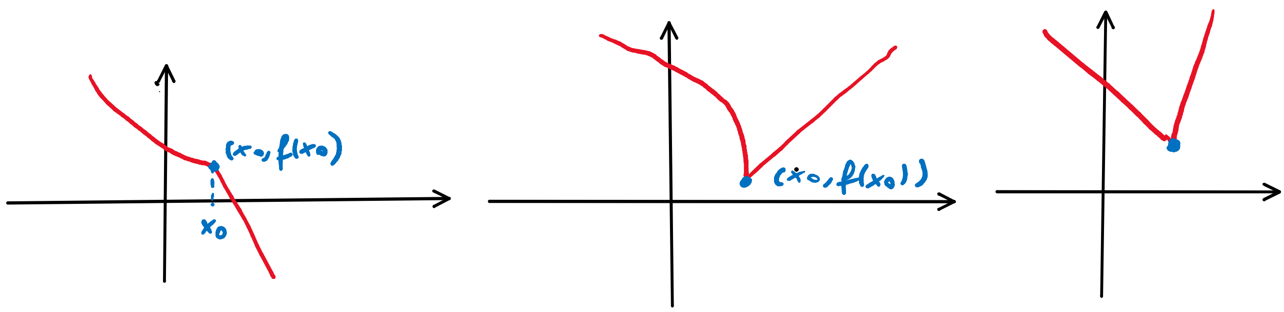
$f'(0) \nexists$ (f non è derivabile in 0) ma $f'_+(0) = 1$ e

$f'_-(0) = -1.$

Def: Sia I un intervallo e sono $f: I \to \mathbb{R}$ una funzione continua in I e $x_0 \in I$ con x_0 interno ad I (x_0 non è un estremo di I). Si dice che $(x_0, f(x_0))$ è un PUNTO ANGOLOSO per il grafico di f se

$\exists\, f'_+(x_0), f'_-(x_0)$ e $f'_+(x_0) \in \mathbb{R} \vee f'_-(x_0) \in \mathbb{R}$

ma $f'_+(x_0) \neq f'_-(x_0)$



• **Def**: Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e sia $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione e $x_0 \in I$ con x_0 interno ad I. Sia f continua in I. Si dice che $(x_0, f(x_0))$ è un PUNTO DI CUSPIDE per il grafico di f se

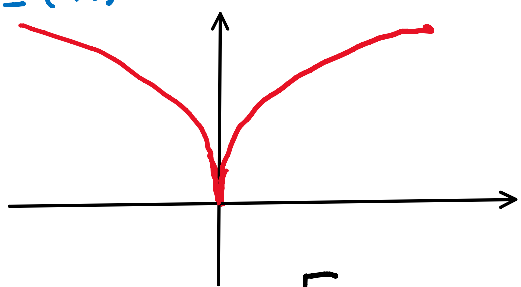
$$f'_+(x_0) = +\infty \quad e \quad f'_-(x_0) = -\infty$$

oppure

$$f'_+(x_0) = -\infty \quad e \quad f'_-(x_0) = -\infty .$$

ESEMPIO

$$f(x) = \sqrt{|x|}$$



$$f'_+(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{\sqrt{|h|} - \sqrt{|0|}}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\sqrt{h}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{h}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$f'_-(0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{\sqrt{|h|} - \sqrt{|0|}}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{\sqrt{-h}}{h} = \lim_{h\to 0^-} - \frac{\sqrt{-h}}{-h} = \lim_{h\to 0^-} - \frac{1}{\sqrt{-h}}$$

$$= -\frac{1}{0^+} = -\infty .$$

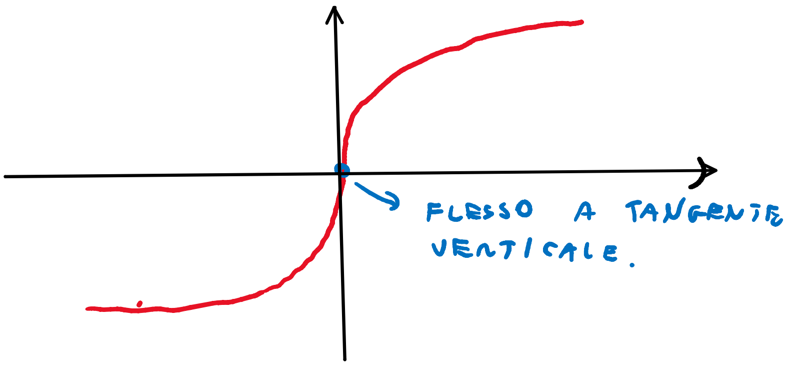
Quindi $(0,0)$ è un punto di cuspide.

Def: Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e sia $f : I \to \mathbb{R}$ continua in I. Sia $x_0 \in I$. Si dice che $(x_0, f(x_0))$ è un PUNTO A TANGENTE VERTICALE per il grafico di f se $\exists \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \in \{+\infty, -\infty\}$.

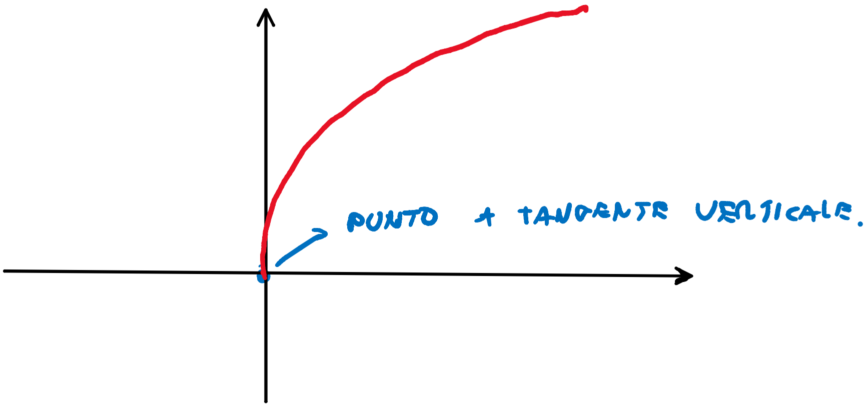
Se inoltre x_0 non è un estremo di I, si dice che $(x_0, f(x_0))$ è UN PUNTO DI FLESSO A TANGENTE VERTICALE.

ESEMPIO

- $f(x) = \sqrt[3]{x}$



- $f(x) = \sqrt{x}$



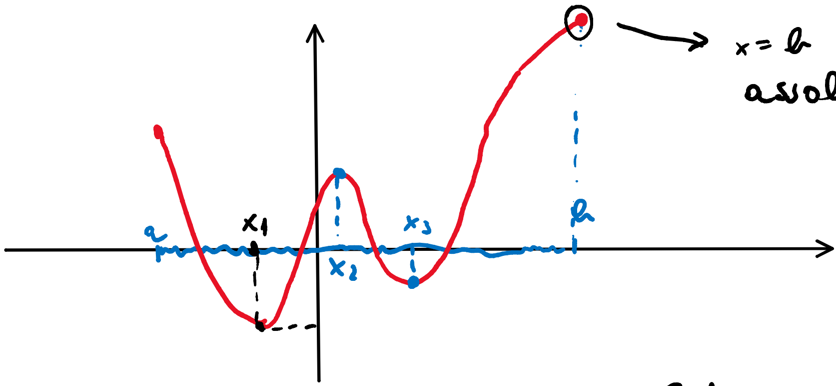
Def: Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e $f: A \to \mathbb{R}$. Si dice che $x_0 \in A$ è un PUNTO DI MASSIMO ASSOLUTO (MINIMO) se $f(x) \leq f(x_0)$ $\forall x \in A$.
(cioè $f(x_0) = \max_A f = \max f(A)$)

Def: Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e sia $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$. Si dice che $x_0 \in A$ è un PUNTO DI MINIMO ASSOLUTO per f in A se $f(x) \geq f(x_0)$ $\forall x \in A$, cioè $f(x_0) = \min_A f = \min f(A)$

Def: Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e siano $f: A \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in A$. Si dice che x_0 è un PUNTO DI MASSIMO LOCALE per f in A se $\exists\, U \in D_{x_0}$ t.c. $f(x) \leq f(x_0)$ $\forall x \in A \cap U$.

Def: Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e siano $f: A \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in A$. Si dice che x_0 è un PUNTO DI MINIMO LOCALE per f in A se $\exists\, U \in D_{x_0}$ t.c. $f(x) \leq f(x_0)$ $\forall x \in A \cap U$.

ESEMPIO



$x = b$ è punto di max assoluto (e locale).

x_1 è punto di min assoluto (e locale)

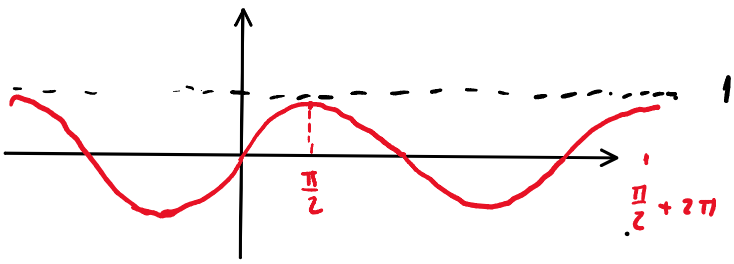
x_2 è punto di max locale

x_3 è un punto di min locale

$x = a$ è un punto max locale.

ESEMPIO

$f(x) = \operatorname{sen} x$

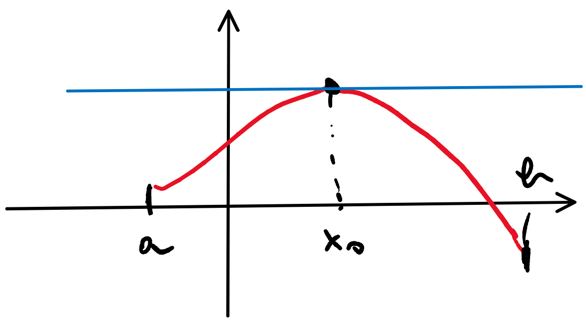


- $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ sono punti di max assoluto (e locale)
- $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ sono punti di min assoluto (e locale).

$$\max_{\mathbb{R}} f = f\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = 1.$$

Teoremi sulle derivate

Nei punti di max / min interni al dominio di una funzione derivabile la retta tangente è orizzontale quindi la derivata è 0

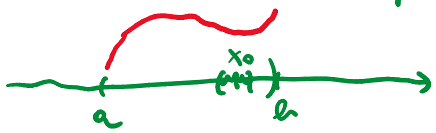


TEOREMA (DI FERMAT)

Siano $a, b \in \mathbb{R}^*$ e sia $f: \overbrace{(a, b)}^{\text{intervallo aperto}} \longrightarrow \mathbb{R}$. Sia $x_0 \in (a, b)$ un punto di massimo o di minimo locale per f in (a, b). Se f è derivabile in x_0, allora $f'(x_0) = 0$.

DIM:

Supponiamo che x_0 sia un punto di min locale f per f in (a,b).
Allora $\exists\, U$ intorno di x_0 tale che $f(x) \geq f(x_0)$ $\forall x \in U \cap (a, b)$.
Siccome (a, b) è aperto e si può supporre che $U \subseteq (a, b)$.



Sappiamo che $\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R}$.

in particolare $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

- Se $x \to x_0^+$ e $x \in U$ allora $x > x_0$ e $f(x) \geq f(x_0)$
  quindi $\frac{\overbrace{f(x) - f(x_0)}^{\geq 0}}{\underbrace{x - x_0}_{> 0}} \geq 0$. $\Rightarrow f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$.
  (corollario del teorema della perm. del segno).

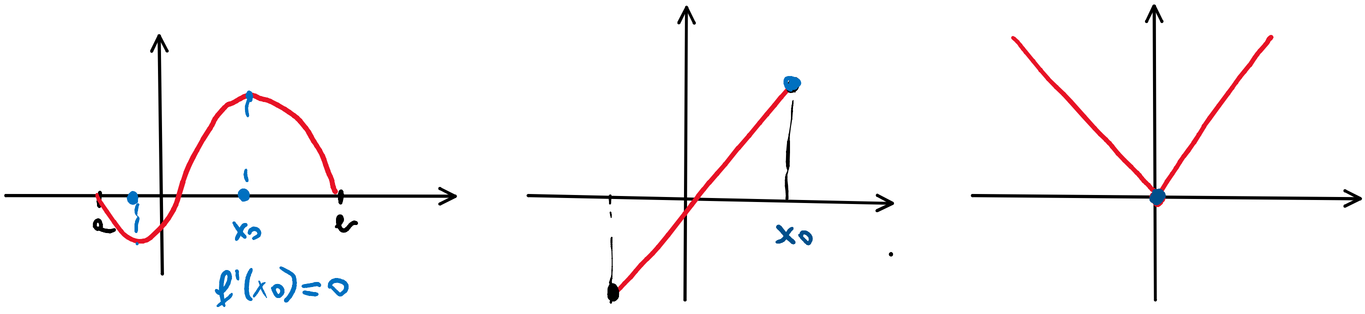
- Se $x \to x_0^-$: $x - x_0 < 0$ ma $f(x) \geq f(x_0)$.
  quindi $\frac{\overbrace{f(x) - f(x_0)}^{\geq 0}}{\underbrace{x - x_0}_{< 0}} \leq 0 \Rightarrow f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$.

Abbiamo dimostrato: $f'(x_0) \geq 0$ e $f'(x_0) \leq 0$
$\Rightarrow f'(x_0) = 0$.

OSS: Sia $f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Se x_0 è un punto di max o min locale per f, ci sono tre possibilità.

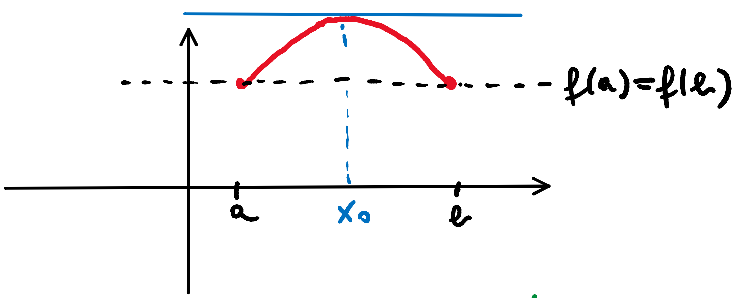
1) $x_0 \in (a, b)$, f è derivabile in x_0 e $f'(x_0) = 0$.
2) $x_0 = a \vee x_0 = b$ (x_0 è un estremo).
3) $x_0 \in (a, b)$ ma f non è derivabile in x_0.

3) $x_0 \in (a, b)$ ma f non è derivabile in x_0.



Teorema di ROLLE

Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$. Sia $f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che f è continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b). Se $f(a) = f(b)$ allora $\exists\ x_0 \in (a, b)$ tale che $f'(x_0) = 0$



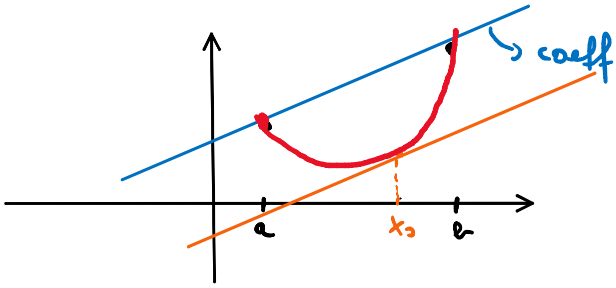
DIM: Siccome f è continua in $[a, b]$, $\exists\ x_1, x_2 \in [a, b]$ tali che $f(x_1) = \min\limits_{[a,b]} f$ e $f(x_2) = \max\limits_{[a,b]} f$.
(per il Teorema di Weierstrass)

- Se $f(x_1) = f(x_2)$ allora f è costante. Quindi $f'(x) = 0\ \ \forall x \in (a, b)$. Quindi x_0 può essere qualsiasi punto di $[a, b]$.

- Se $f(x_1) \neq f(x_2)$. Siccome $f(a) = f(b)$. Uno tra x_1 e x_2 deve appartenere ad (a, b). Per il teorema di fermat in questo punto f' vale 0.

TEOREMA DI LAGRANGE

Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Sia $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b). Allora $\exists\, x_0 \in (a, b)$ tale che $f'(x_0) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$



$\hookrightarrow$ coeff. $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ $\left(y = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a) \right)$

DIM

Sia $g(x) = f(x) - \left(\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a) \right)$

g è continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b).

Inoltre $g(a) = f(a) - (\quad 0 \quad + f(a)) = f(a) - f(a) = 0$.

$$g(b) = f(b) - \left(\frac{f(b) - \cancel{f(a)}}{\cancel{b - a}} \cancel{(b - a)} + \cancel{f}(a) \right)$$
$$= f(b) - f(a) = 0$$

$g(a) = g(b)$. Quindi per Rolle $\exists\, x_0 \in (a, b)$ t.c. $g'(x_0) = 0$. Ma

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Quindi $g'(x_0) = 0 \implies f'(x_0) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

TEOREMA (CRITERIO DI MONOTONIA)

Sia $f: I \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile in I con I intervallo. Allora valgono le seguenti equivalenze:

1) f è monotona crescente in $I \iff f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$.
2) f è monotona decrescente in $I \iff f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in I$.

Inoltre:

3) $f'(x) > 0 \quad \forall x \in I \quad \Rightarrow \quad f$ è strett. monotona crescente.

4) $f'(x) < 0 \quad \forall x \in I \quad \Rightarrow \quad f$ è strett. monotona decrescente.

DIM

1) $\Rightarrow$ Se f è monotona crescente.

Allora $\forall x, y \in A$ con $x < y$: $f(x) \leq f(y)$.

In particolare:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Se $h > 0 \Rightarrow f(x+h) \geq f(x). \Rightarrow \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0.$

Se $h < 0 \Rightarrow \underset{(x+h < x)}{f(x+h) \leq f(x)} \Rightarrow \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0.$

In ogni caso $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0$. Quindi $f'(x) \geq 0$.

$\Leftarrow$ Se $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$.

Se $x_1, x_2 \in I$ t.c. $x_1 < x_2$. Possiamo applicare Lagrange a f nell'intervallo $[x_1, x_2]$. Quindi $\exists$ $x_0 \in (x_1, x_2)$ t.c. $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(x_0) \geq 0$.

Quindi $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq 0$ e $x_2 - x_1 > 0 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) \geq 0$

$\Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$.

Abbiamo dimostrato che $\forall x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_2$ si ha $f(x_1) \leq f(x_2)$ cioè f è monotona crescente in I.

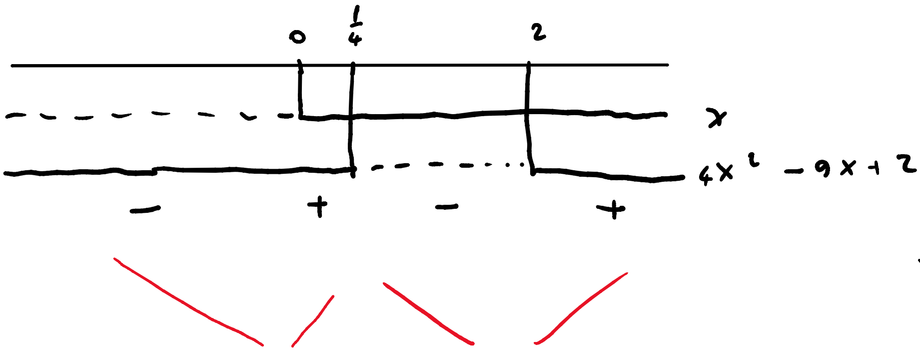
ESEMPIO

- Consideriamo $f(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 + 1$.
  Proviamo a disegnare il grafico di f.

$$f'(x) = 4x^3 - 9x^2 + 2x$$
$$= x(4x^2 - 9x + 2)$$

studiamo il segno di f':

$$4x^2 - 9x + 2 = 0$$
$$\Delta = 81 - 32 = 49$$
$$x_{1,2} = \frac{9 \pm 7}{8} \begin{cases} 2 \\ \frac{1}{4} \end{cases}$$

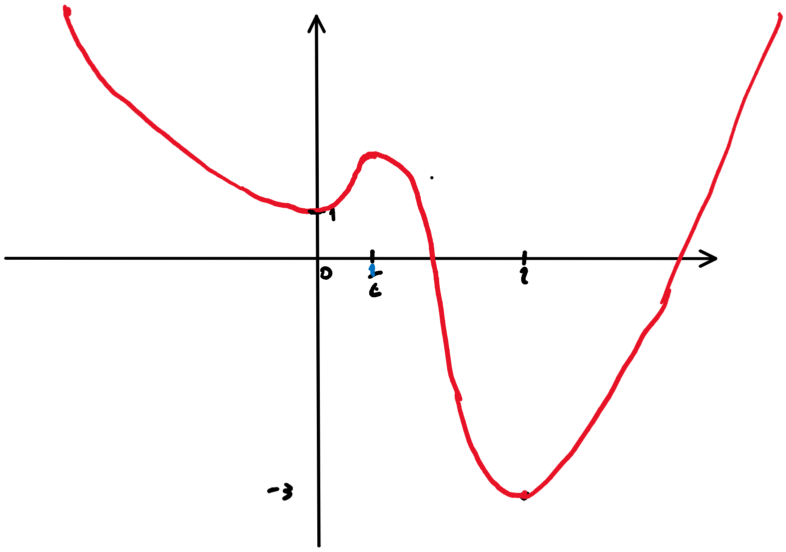


$f(0) = 1$

$f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{261}{256} > 1$

$f(2) = -3$

$$\lim_{x \to -\infty} x^4 - 3x^2 + x^2 + 1 = +\infty$$
$$\lim_{x \to +\infty} x^4 - 3x^3 + x^2 + 1 = +\infty$$



Il segno della derivata ci dice dove la funzione cresce e dove decresce.