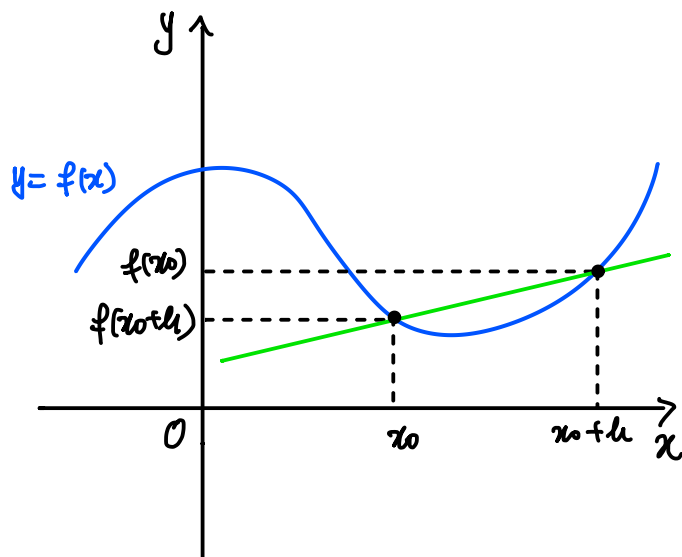


Consideriamo $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $x_0 \in I$, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, $h \neq 0$



$$y = f(x_0) + \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} (x - x_0)$$

RETTA SECANTE al grafico di f nei punti $(x_0, f(x_0))$, $(x_0+h, f(x_0+h))$

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

si dice **RAPPORTO INCREMENTALE** di f centrato in x_0 di incremento h e rappresenta il coefficiente

angolare delle rette secanti nei punti $(x_0, f(x_0))$, $(x_0+h, f(x_0+h))$

Domanda: cosa succede se consideriamo $h \rightarrow 0$?

Abbiamo una "retta secante limite" che chiameremo retta tangente al grafico di f in $(x_0, f(x_0))$

Definizione $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $x_0 \in I$, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$

$$\text{Se } \exists \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \stackrel{\uparrow}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R}^*$$

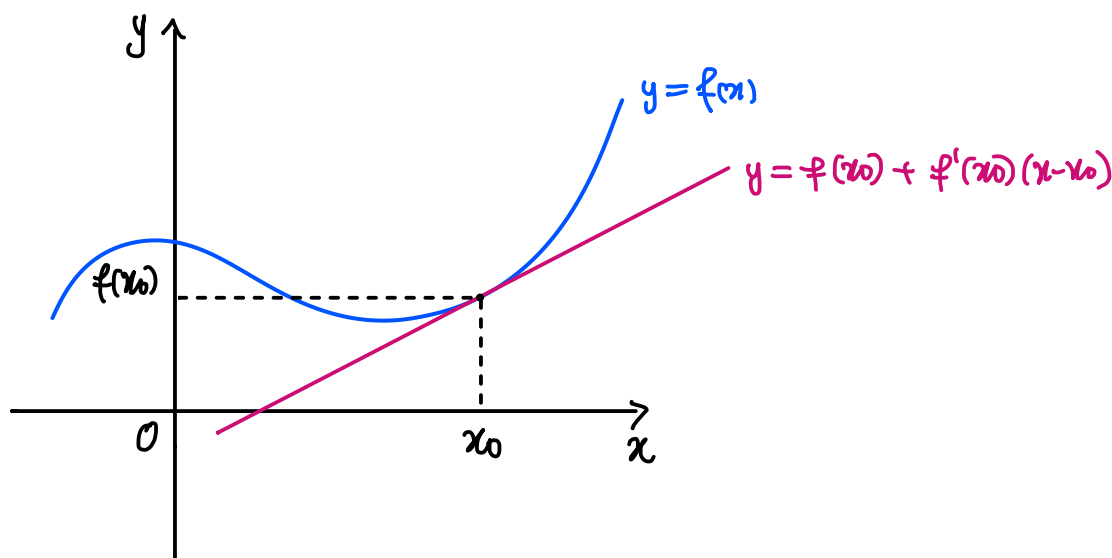
tale limite si chiama DERIVATA di f in x_0 e si denota con uno dei seguenti simboli

$$f'(x_0), Df(x_0), \frac{df}{dx}(x_0), \dot{f}(x_0), f^{(1)}(x_0)$$

Se $f'(x_0) \in \mathbb{R}$ si dice che f è DERIVABILE in x_0 e la retta

di equazione $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ si chiama RETTA TANGENTE al grafico di f in $(x_0, f(x_0))$

Osservazione Se f è derivabile in x_0 , $f'(x_0)$ è il coefficiente angolare della tangente al grafico di f in x_0



Teorema (continuità delle funzioni derivabili)

Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $x_0 \in I$ e $f: I \rightarrow \mathbb{R}$

Se f è derivabile in x_0 allora f è continua in x_0

Dimostrazione: Per ipotesi: $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \in \mathbb{R}$

Vogliamo dimostrare che f è continua in x_0 , cioè $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0) + f(x_0)] \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\rightarrow f'(x_0)} \underbrace{(x - x_0)}_{\rightarrow 0} + f(x_0) \right] = f'(x_0) \cdot 0 + f(x_0) = f(x_0) \end{aligned}$$

Derivate di alcune funzioni elementari

1) Funzioni costanti: $f(x) = c \quad \forall x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0 \Rightarrow f'(x) = 0$$

$$Dc = 0$$

2) $f(x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h) - x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 1 = 1$$

$$Dx = 1$$

$$3) f(x) = x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \stackrel{[0/0]}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2hx + h^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2hx + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x+h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x+h) = 2x \end{aligned}$$

$$\boxed{Dx^2 = 2x}$$

$$4) f(x) = x^\alpha \quad \text{con } \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall x > 0$$

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^\alpha - x^\alpha}{h} \stackrel{[0/0]}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^\alpha \left[\left(\frac{x+h}{x} \right)^\alpha - 1 \right]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} x^\alpha \cdot \frac{\left(\frac{x+h}{x} \right)^\alpha - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} x^\alpha \cdot \frac{\left(1 + \frac{h}{x} \right)^\alpha - 1}{h} \end{aligned}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} x^\alpha \cdot \frac{(1+t)^\alpha - 1}{xt} = \lim_{t \rightarrow 0} x^{\alpha-1} \cdot \underbrace{\frac{(1+t)^\alpha - 1}{t}}_{\rightarrow \alpha} = \alpha x^{\alpha-1}$$

$$\begin{aligned} \uparrow \\ t = \frac{h}{x} \Leftrightarrow h = tx \\ \text{se } h \rightarrow 0 \text{ allora } t \rightarrow 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{Dx^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}}$$

Esempi:

$$Dx^3 = 3x^2 \quad x \in \mathbb{R}$$

$$Dx^4 = 4x^3 \quad x \in \mathbb{R}$$

$$D\sqrt{x} = Dx^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad x > 0$$

$$D\sqrt[3]{x} = Dx^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \quad x \neq 0$$

$$D\frac{1}{x} = Dx^{-1} = (-1)x^{-2} = -\frac{1}{x^2} \quad x \neq 0$$

$$D\frac{1}{x^4} = Dx^{-4} = (-4)x^{-5} = -\frac{4}{x^5} \quad x \neq 0$$

$$D\frac{1}{5\sqrt{x}} = Dx^{-\frac{1}{5}} = \left(-\frac{1}{5}\right)x^{-\frac{6}{5}} = -\frac{1}{5\sqrt[5]{x^6}} \quad x \neq 0$$

per i seguenti

$$\boxed{Dx^m = mx^{m-1}}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{D\sqrt[m]{x} = \frac{1}{m\sqrt[m]{x^{m-1}}}}$$

$$\begin{cases} \forall x > 0 & \text{se } m \text{ è pari} \\ \forall x \neq 0 & \text{se } m \text{ è dispari} \end{cases}$$

$$\boxed{D\frac{1}{x^m} = -\frac{m}{x^{m+1}}}$$

$$\forall x \neq 0$$

5) $f(x) = |x|$

se $x=0$ allora f non è derivabile

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \text{sgn}(h) \neq$$

$$\text{ma} \lim_{h \rightarrow 0^-} \text{sgn}(h) = \lim_{h \rightarrow 0^-} -1 = -1$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \text{sgn}(h) = \lim_{h \rightarrow 0^+} 1 = 1$$

se $x \neq 0$ allora

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$$\boxed{D|x| = \frac{x}{|x|}} \quad \text{per } x \neq 0$$

Osservazione $f(x) = ax+b \quad \forall x \in \mathbb{R}$ con $a, b \in \mathbb{R}$ costanti

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(a(x+h)+b) - (ax+b)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(ax+ah+b) - (ax+b)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} a = a \end{aligned}$$

$$\boxed{D(ax+b) = a}$$

6) $f(x) = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^x \cdot e^h - e^x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} e^x \cdot \underbrace{\frac{e^h - 1}{h}}_{\rightarrow 1} \stackrel{[0/0]}{=} e^x \end{aligned}$$

$$\boxed{De^x = e^x} \quad \text{ma in generale si ha}$$

$$\boxed{Da^x = \ln a \cdot a^x}$$

7) $f(x) = \ln x \quad \forall x > 0$

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} \stackrel{[0/0]}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}} \stackrel{[0/0]}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cdot \underbrace{\frac{\ln(1+t)}{t}}_{\rightarrow 1} = \frac{1}{x} \end{aligned}$$

$t = \frac{h}{x} \Leftrightarrow h = tx$
 se $h \rightarrow 0$ allora $t \rightarrow 0$

$$\boxed{D \ln x = \frac{1}{x}} \quad \forall x > 0, \text{ in generale}$$

$$\boxed{D \log_a x = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x}}$$

$$8) f(x) = \sin x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \quad \left[\frac{0}{0} \right]$$

$$\stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{formule di} \\ \text{addizione per} \\ \text{il seno}}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sin x \cos h + \cos x \sin h) - \sin x}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x (\cos h - 1) + \cos x \cdot \sin h}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left[-\sin x \cdot \underbrace{\frac{1 - \cos h}{h^2}}_{\rightarrow \frac{1}{2}} \cdot \underbrace{h}_{\rightarrow 0} + \cos x \cdot \underbrace{\frac{\sin h}{h}}_{\rightarrow 1} \right]$$

$$= -\sin x \cdot \frac{1}{2} \cdot 0 + \cos x \cdot 1 = \cos x$$

$$\boxed{D \sin x = \cos x}$$

$$9) f(x) = \cos x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Usando le formule di addizione per il coseno

$\cos(x+h) = \cos x \cos h - \sin x \sin h$, si trova che

$$\boxed{D \cos x = -\sin x}$$

Teorema (operazioni tra derivate)

Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $x_0 \in I$, $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$

Se f, g sono derivabili in x_0 allora

$$1) f+g \text{ \u00e8 derivabile in } x_0 \text{ e } (f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

$$2) f-g \text{ \u00e8 derivabile in } x_0 \text{ e } (f-g)'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0)$$

$$3) cf \text{ \u00e8 derivabile in } x_0 \text{ e } (cf)'(x_0) = c f'(x_0)$$

$$4) f \cdot g \text{ \u00e8 derivabile in } x_0 \text{ e } (f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$$

REGOLA di LEIBNIZ

$$5) \text{ se } g(x_0) \neq 0 \text{ allora } \frac{1}{g} \text{ \u00e8 derivabile in } x_0$$

$$\left(\frac{1}{g} \right)'(x_0) = - \frac{g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$$

$$6) \text{ se } g(x_0) \neq 0 \text{ allora } \frac{f}{g} \text{ \u00e8 derivabile in } x_0$$

$$\left(\frac{f}{g} \right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) g(x_0) - f(x_0) g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$$

REGOLE di DERIVAZIONE

$$D(f+g) = D(f) + D(g)$$

$$D(f-g) = D(f) - D(g)$$

$$D(cf) = c D(f)$$

$$D(f \cdot g) = D(f) \cdot g + f \cdot D(g)$$

$$D\left(\frac{1}{g}\right) = -\frac{D(g)}{g^2}$$

$$D\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{D(f) \cdot g - f \cdot D(g)}{g^2}$$

Esempi

$$1) D(-5x^3) = -5 \cdot D(x^3) = -5 \cdot 3 \cdot x^2 = -15x^2$$

$$\begin{aligned} 2) D(x^3 + 5x^2 - 3x + 4) &= D(x^3) + D(5x^2) + D(-3x) + \underbrace{D(4)}_{=0} \\ &= 3x^2 + 5D(x^2) - 3D(x) \\ &= 3x^2 + 10x - 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) D(-2x^5 + 7x^4 - \frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 7x - 100) \\ = -10x^4 + 28x^3 - \frac{3}{4}x^2 + 3x + 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4) D(x \cos x) &= D(x) \cos x + x D(\cos x) \\ &= \cos x - x \sin x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5) D(\sqrt{x} \cdot e^x) &= D(\sqrt{x}) \cdot e^x + \sqrt{x} D(e^x) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}} e^x + \sqrt{x} e^x = e^x \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x} \right) \\ &= \frac{e^x}{2\sqrt{x}} (1 + 2x) \end{aligned}$$

$$6) D\left(\frac{1}{x^3 + x^2 + 1}\right) = -\frac{3x^2 + 2x}{(x^3 + x^2 + 1)^2} = -\frac{x(3x+2)}{(x^3 + x^2 + 1)^2}$$

$$\begin{aligned} 7) D\left(\frac{x^3+1}{x^2-2}\right) &= \frac{D(x^3+1) \cdot (x^2-2) - (x^3+1) D(x^2-2)}{(x^2-2)^2} \\ &= \frac{(3x^2) \cdot (x^2-2) - (x^3+1) \cdot (2x)}{(x^2-2)^2} = \frac{x [3x(x^2-2) - (x^3+1) \cdot 2]}{(x^2-2)^2} \\ &= \frac{x [x^3 - 6x - 2]}{(x^2-2)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8) \quad D(\tan x) &= D\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) = \frac{D(\sin x) \cos x - \sin x D(\cos x)}{(\cos x)^2} \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x \end{aligned}$$

$$D(\tan x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

Teorema (Derivate delle funzioni composte)

Siano $I, J \subseteq \mathbb{R}$ intervalli, $x_0 \in I$, $y_0 \in J$

$f: I \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $f(I) \subseteq J$, $g: J \rightarrow \mathbb{R}$.

Se f è derivabile in x_0 e g è derivabile in $y_0 = f(x_0)$

allora $g \circ f$ è derivabile in x_0 e

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

$$D(g \circ f) = (D(g) \circ f) \cdot D(f)$$

REGOLA della CATENA

Esempi

1) Calcoliamo la derivata di $e^{x^3} = g(f(x))$

$$g(x) = e^x$$

$$f(x) = x^3$$

$$g'(x) = e^x$$

$$f'(x) = 3x^2$$

$$\begin{aligned} D(e^{x^3}) &= g'(f(x)) \cdot f'(x) \\ &= e^{f(x)} \cdot f'(x) = e^{x^3} \cdot 3x^2 \end{aligned}$$

in generale

$$D e^{f(x)} = f'(x) \cdot e^{f(x)}$$

$$2) \quad D(e^{\sin x}) = \cos x e^{\sin x}$$

$$3) \quad D(e^{\sqrt{x}}) = \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}}$$

$$\begin{aligned} 4) \quad D\left(e^{\frac{x}{x+1}}\right) &= D\left(\frac{x}{x+1}\right) \cdot e^{\frac{x}{x+1}} = \frac{D(x) \cdot (x+1) - x \cdot D(x+1)}{(x+1)^2} \cdot e^{\frac{x}{x+1}} \\ &= \frac{1 \cdot (x+1) - x \cdot 1}{(x+1)^2} e^{\frac{x}{x+1}} = \frac{e^{\frac{x}{x+1}}}{(x+1)^2} \end{aligned}$$