MATEMATICA - LEZIONE 22

lunedì 11 novembre 2024 09:04

- Ricordare

1) Nei limiti si possono fare delle sostituzioni.

2) Gerarchia degli infiniti (per $x \to +\infty$)

- $\log_a x$, $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$.
- x^α con $\alpha > 0$
- a^x con $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$.

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{\log_a x}{x^\alpha} = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = 0}$$

3) Limiti notevoli. Tipo $\frac{0}{0}$:

- $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
- $\lim_{x \to 0} \frac{\arctan x}{x} = 1$
- $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$
- $\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$ $\left(\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1\right)$
- $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$
- $\lim_{x \to 0} \frac{\log_a (1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}$ $\left(\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1\right)$
- $\lim_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$
- $\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$

Tipo $1^{\pm\infty}$

- $\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$
- $\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$
- $\lim_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

Tipo $0 \cdot \pm\infty$

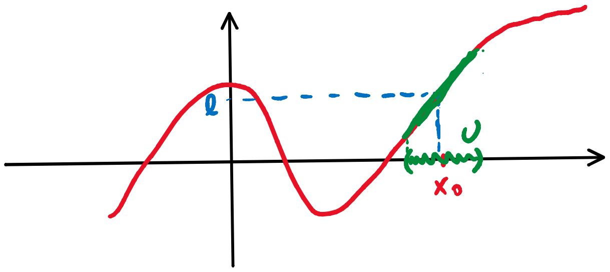
- $\lim_{x \to 0} x^\alpha \log_a x = 0$
- $\lim_{x \to 0} x^\alpha |\log_a x|^\beta = 0$

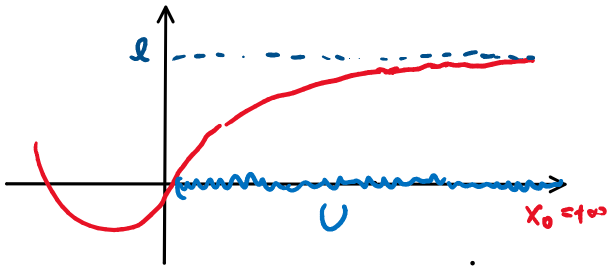
Teorema della PERMANENZA DEL SEGNO

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme, siano $x_0 \in D(A)$, $\ell \in \mathbb{R}^*$ e $f: A \to \mathbb{R}$ tali che $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$. Allora:

1) Se $\ell > 0$, $\exists\, U \in \mathcal{I}_{x_0}$ t.c. $f(x) > 0 \;\; \forall x \in U \cap A \setminus \{x_0\}$.

2) Se $\ell < 0$, $\exists\, U \in \mathcal{I}_{x_0}$ t.c. $f(x) < 0 \;\; \forall x \in U \cap A \setminus \{x_0\}$





Attenzione:

Se $\exists U \in \mathcal{I}_{x_0}$ t.c. $f(x) > 0$ $\forall x \in U \cap A \setminus \{x_0\}$, non è detto che $l > 0$.

ESEMPIO

$x_0 = +\infty$, $f(x) = \frac{1}{x^2} > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\} = \mathrm{Dom}(f)$. Ma

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ ($f>0$ ma $l=0$)

Ricordare (COROLLARIO DEL TEOREMA DELLA PERM. DEL SEGNO)

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme, siano $x_0 \in D(A)$, $l \in \mathbb{R}^*$ e $f: A \to \mathbb{R}$ tali che $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$.

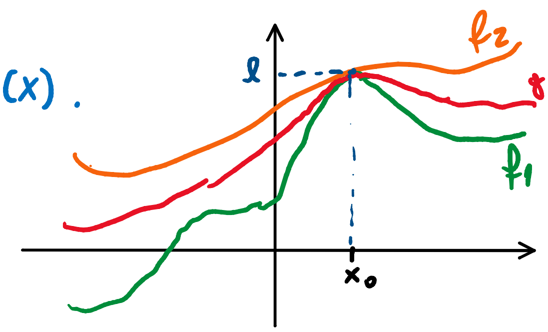
1) Se $\exists U \in \mathcal{I}_{x_0}$ t.c. $f(x) \geq 0$, allora $l \geq 0$
2) Se $\exists U \in \mathcal{I}_{x_0}$ t.c. $f(x) \leq 0$, allora $l \leq 0$

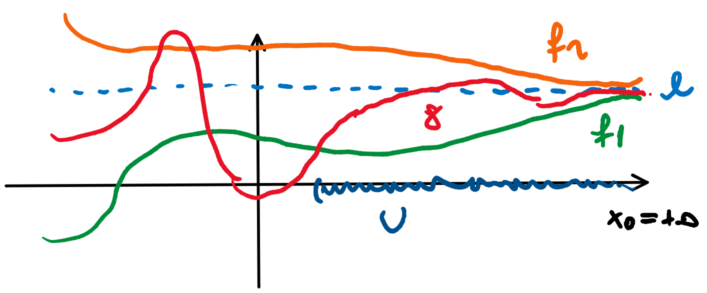
TEOREMA DEI CARABINIERI / TEOREMA DELLA CONV. OBBLIGATA

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in D(A)$, $l \in \mathbb{R}^*$ e siano $f_1, f_2, g: A \to \mathbb{R}$ tre funzioni. Assumiamo che:

1) $\exists U \in \mathcal{I}_{x_0}$ t.c. $f_1(x) \leq g(x) \leq f_2(x)$.
2) $\lim_{x\to x_0} f_1(x) = \lim_{x\to x_0} f_2(x) = l$.

Allora $\lim_{x\to x_0} g(x) = l$.





ESEMPIO

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x} = ?$$

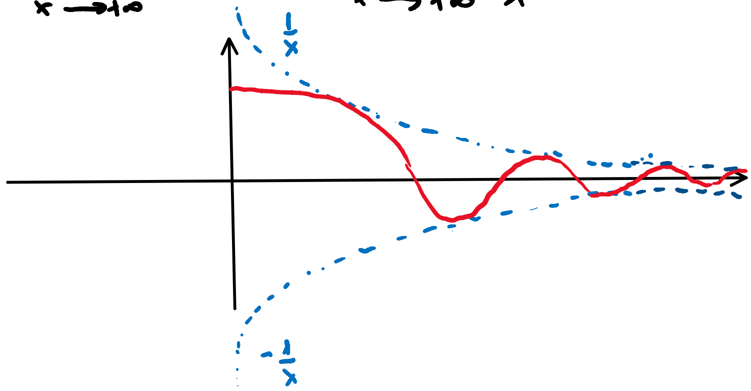
(Da non confondere con $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$)

$$\underbrace{-\frac{1}{x}}_{f_1} \leq \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{g} \leq \underbrace{\frac{1}{x}}_{f_2} \qquad \forall x \in \mathbb{R},\ x>0.$$

$$\lim_{x\to+\infty} f_1(x) = \lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f_2(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Quindi $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$.



CONSEGUENZE.

- Se f_1 è limitata (in un intorno di x_0) e $\lim_{x\to x_0} f_2(x) = +\infty$ (o $-\infty$), allora $\lim_{x\to x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = 0$
- Se f_1 è limitata e $\lim_{x\to x_0} f_2(x) = 0$, allora $\lim_{x\to x_0} f_1(x) f_2(x) = 0$

Abbiamo visto che non sempre $\lim_{x\to x_0} f(x)$ esiste.

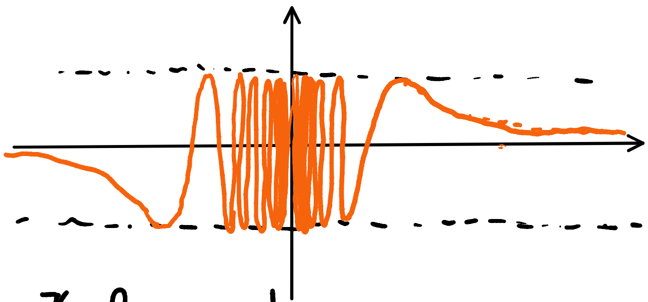
Ad esempio:

$\nexists \lim_{x\to+\infty} \tan x$, $\nexists \lim_{x\to+\infty} \sin x$, $\nexists \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$ $\left(\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} \neq \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x}\right)$

Ci sono dei casi in cui anche limite destro / sinistro non esistono

ESEMPIO

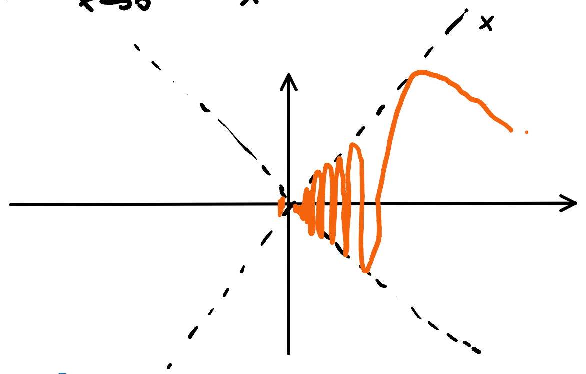
$f(x) = \operatorname{sen} \frac{1}{x}$



$\nexists \lim_{x \to 0^+} \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ e $\nexists \lim_{x \to 0^-} \operatorname{sen} \frac{1}{x}$

Invece:

$\lim_{x \to 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$



quindi $\lim_{x \to 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0$.

FUNZIONI CONTINUE

x_0 deve essere un punto del dominio

Def: Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo. Siano $\boxed{x_0 \in I}$ e $f: I \to \mathbb{R}$.
Si dice che f è CONTINUA IN x_0 se $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
Si dice che f è CONTINUA IN I se f è continua in tutti i punti di I (f è continua in x_0 $\forall x_0 \in I$).

Nota: Se $f: A \to \mathbb{R}$ con $A \subseteq \mathbb{R}$ (non un intervallo) la definizione di continuità deve distinguere i punti di accumulazione dai "punti isolati".

- Se $x_0 \in D(A) \cap A$, f è continua in $x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
- Se $x_0 \in A \setminus D(A)$, f è sempre continua in x_0.

Come per gli intervalli, si dice che f è continua in A se lo è in tutti i punti di A.

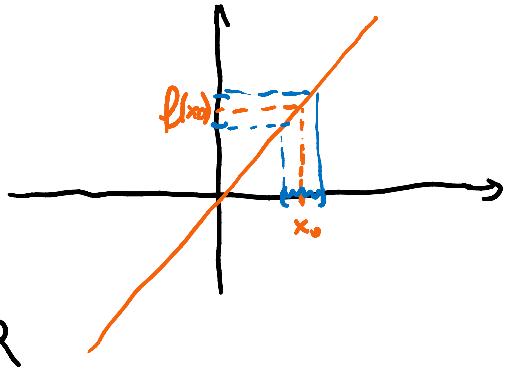
ESEMPIO 1

$f(x) = x$.

$\forall x_0 \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \to x_0} x = x_0 = f(x_0)$

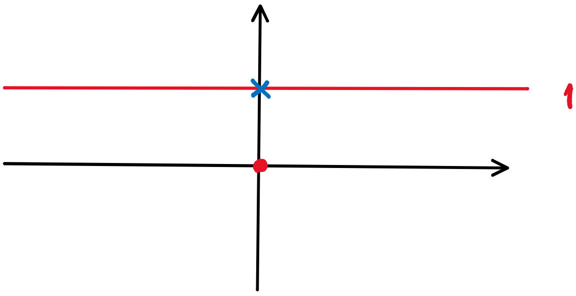
f è continua in x_0

Quindi f è continua in $\mathbb{R}$



ESEMPIO 2

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$



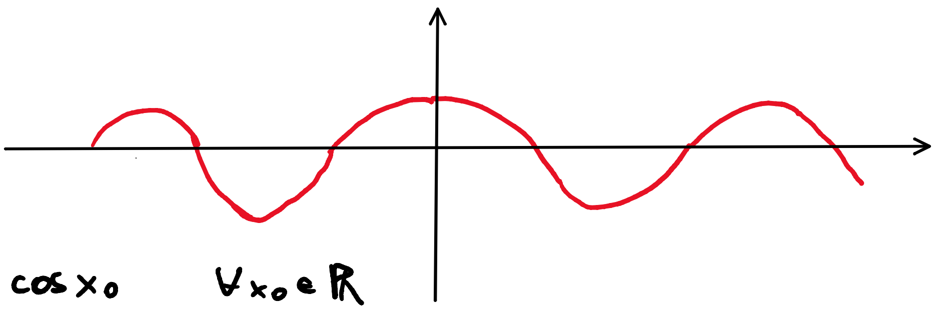
Se $x_0 = 0$:

$f(x_0) = f(0) = 0$ ma $\lim_{x \to x_0} f(x) = 1$

f non è continua in $x_0 = 0$. (f è continua in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$)

ESEMPIO 3

$f(x) = \cos x$

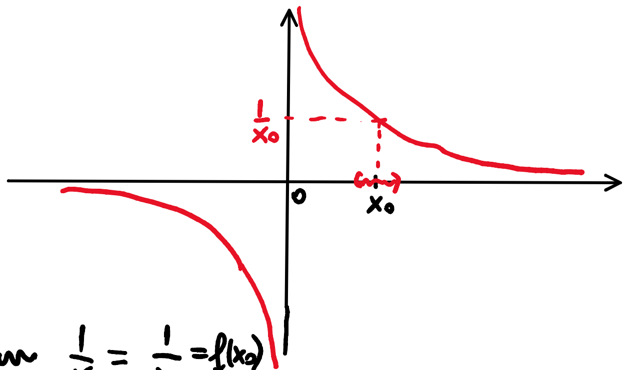


$\lim_{x \to x_0} \cos x = \cos x_0 \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$

ESEMPIO 4

$f(x) = \frac{1}{x}$

$Dom(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

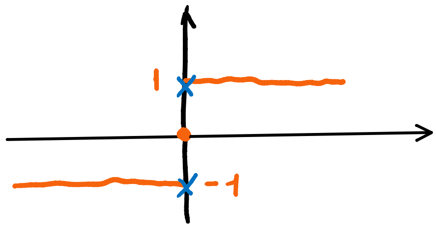


- $\forall x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\lim_{x \to x_0} \frac{1}{x} = \frac{1}{x_0} = f(x_0)$
  f è continua in x_0
- E se $x_0 = 0$? $x_0 \notin Dom(f)$ quindi f non è continua in x_0.

- f è continua nel suo dominio.

ESEMPIO 5

$$f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$



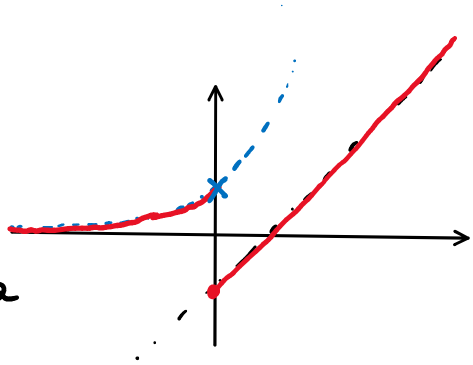
f non è continua in 0 perché

$\nexists \lim_{x \to 0} f(x)$ $\quad \left(\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} 1 = 1 \right.$

$\left. \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} -1 = -1 \right)$

ESEMPIO 6

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{se } x \geq 0 \\ e^x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$



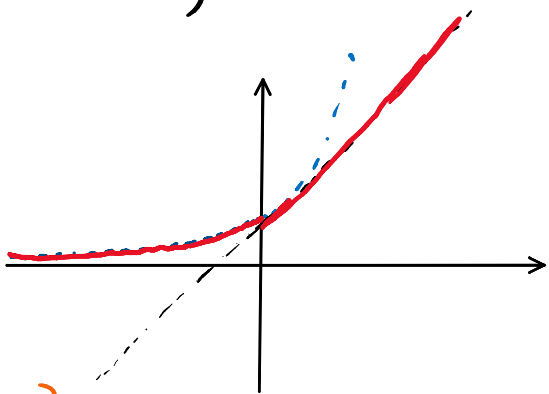
$0 \in \mathrm{Dom}(f)$ e f non è continua in $x_0 = 0$.

$\nexists \lim_{x \to 0} f(x)$ $\left(\text{perché } \lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} (x-1) = -1 \right.$

$\left. \text{e } \lim_{x \to 0^-} e^x = 1 \right)$

ESEMPIO 7

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{se } x \geq 0 \\ e^x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$



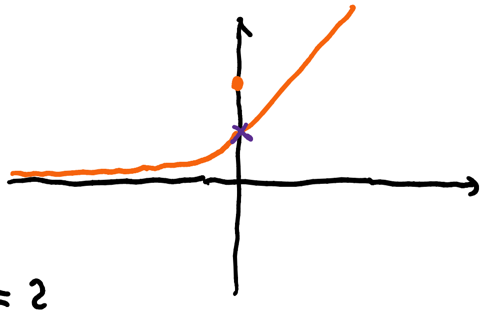
$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (x+1) = 1 \\ \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} e^x = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \exists \lim_{x \to 0} f(x) = 1$$

e $f(0) = 0 + 1 = 1$

f è continua in $x_0 = 0$ perché $\lim_{x \to 0} f(x) = 1 = f(0)$.

ESEMPIO 8

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x > 0 \\ e^x & \text{se } x < 0 \\ 2 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$



$\exists \lim_{x \to 0} f(x) = 1$ ma $f(0) = 2$

quindi f non è continua in $x_0 = 0$.

oss: $f(x) = x^n$, $f(x) = x^{-n}$, $f(x) = a^x$, $f(x) = \log_a x$

$f(x) = \sin x$, $f(x) = \cos x$, $f(x) = \tan x$ sono funzioni continue nel loro dominio

Teorema (OPERAZIONI TRA FUNZIONI CONTINUE)

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme e siano $f, g: A \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in A$. Se f e g sono continue in x_0, allora:

1) $f+g$ è continua in x_0
2) $f-g$ è continua in x_0
3) cf è continua in x_0 $\forall c \in \mathbb{R}$
4) $f \cdot g$ è continua in x_0
5) $\frac{f}{g}$ è continua in x_0 se $g(x_0) \neq 0$.

TEOREMA (CONTINUITÀ DELLA FUNZIONE COMPOSTA)

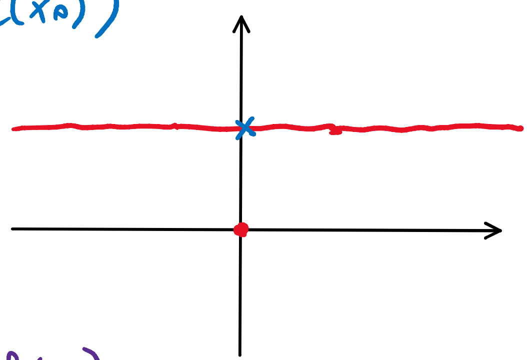
Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}$, $f: A \to B$, $g: B \to \mathbb{R}$.
Se f è continua in $x_0 \in A$ e g è continua in $f(x_0)$, allora $g \circ f$ è continua in $f(x_0)$.

TEOREMA (CONTINUITÀ DELLA FUNZIONE INVERSA)
Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e sia $f: I \to f(I)$ una funzione continua in $x_0 \in I$. Se f è invertibile allora $f^{-1}: f(I) \to I$ è continua in $f(x_0)$.

Classificazione dei punti di discontinuità

Def: Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme, siano $f: A \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in A$. Si dice che x_0 è un **PUNTO DI DISCONTINUITÀ PER f** se f non è continua in x_0.

Def Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e sia $x_0 \in I$. Sia $f: I \to \mathbb{R}$. Si dice che x_0 è un punto di **DISCONTINUITÀ ELIMINABILE** per f se $\exists \lim_{x \to x_0} f(x)$ ma tale limite è diverso da $f(x_0)$ $\left(\exists \lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)\right)$



ESEMPI

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

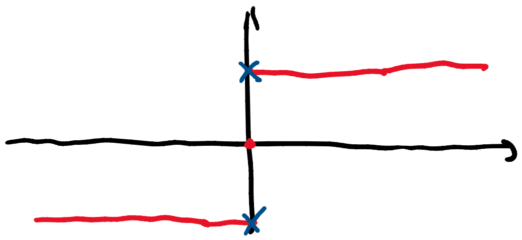
$$\lim_{x \to 0} f(x) = 1 \neq 0 = f(0)$$

$x_0 = 0$ è un punto di discontinuità eliminabile.

Def: Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e siano $x_0 \in I$ e $f: I \to \mathbb{R}$. Si dice che x_0 è un **PUNTO DI DISCONTINUITÀ DI SALTO** se x_0 è un punto interno ad I (non è uno degli estremi) e $\exists \lim_{x \to x_0^+} f(x) \in \mathbb{R}$, $\exists \lim_{x \to x_0^-} f(x) \in \mathbb{R}$ ma questi due limiti sono diversi.

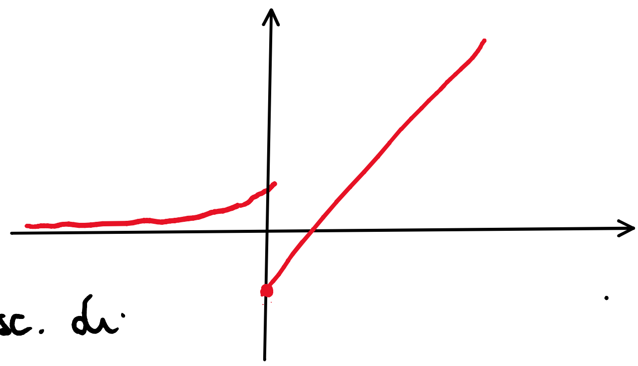
ESEMPI

- $f(x) = \operatorname{sgn} x$



$\left(\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1 \,, \quad \lim_{x \to 0^-} f(x) = -1 \right.$ quindi $x_0 = 0$ è un punto di discontinuità di salto$\left. \right)$

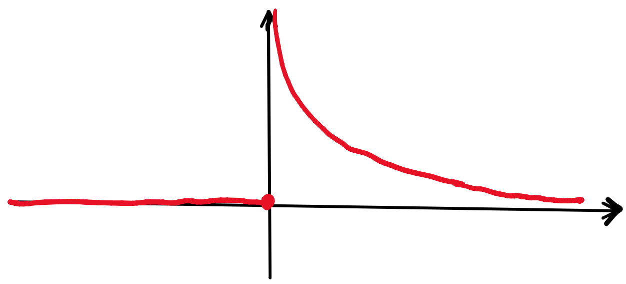
- $f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{se } x \geq 0 \\ e^x & \text{se } x < 0 \end{cases}$



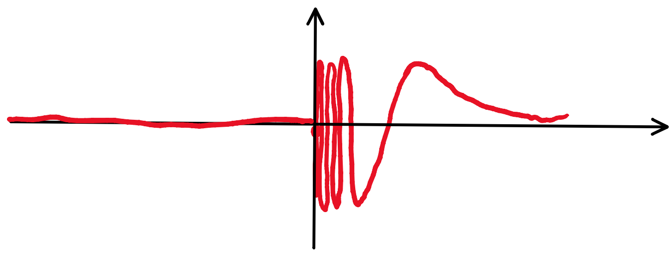
$x_0 = 0$ è un punto di disc. di salto.

Def: Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, siano $x_0 \in I$ e $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$. Si dice che x_0 è un PUNTO DI DISCONTINUITÀ DI SECONDA SPECIE se f non è continua in x_0 e x_0 non è un punto di disc. eliminabile o di salto

$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ 2^{\frac{1}{x}} & \text{se } x > 0 \end{cases}$



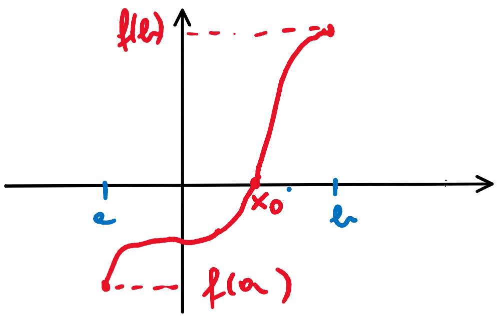
$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$



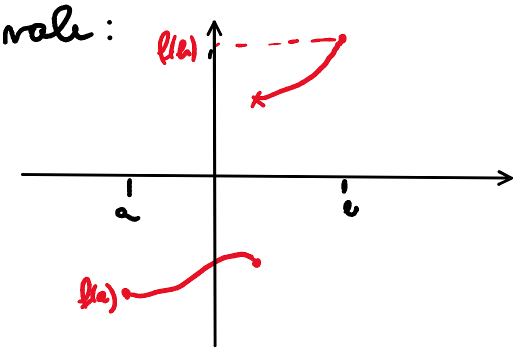
Teoremi sulle funzioni continue.

TEOREMA DEGLI ZERI

Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$. Sia $f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua in $[a, b]$. Se $f(a) \cdot f(b) < 0$, allora $\exists\, x_0 \in (a, b)$ t.c. $f(x_0) = 0$.



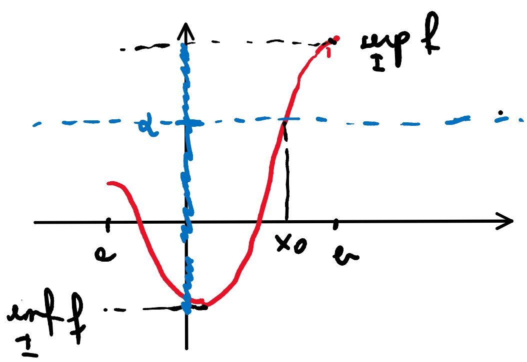
Nota, se f non è continua il teorema non vale:



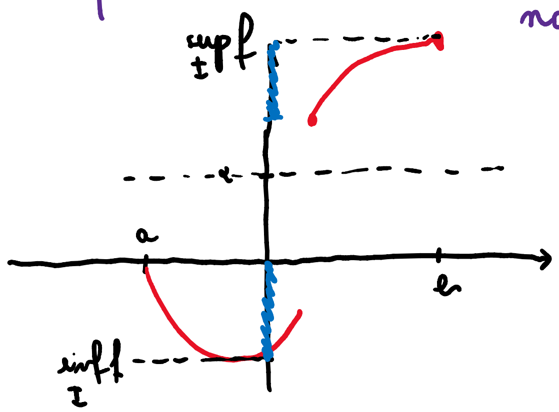
$\nexists\, x_0$ t.c. $f(x_0) = 0$

TEOREMA DEI VALORI INTERMEDI

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e sia $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ continua in I. Allora $f(I)$ è un intervallo, cioè $\forall\, \alpha \in (\inf_I f, \sup_I f)$ $\exists\, x_0 \in I$ t.c. $f(x_0) = \alpha$.

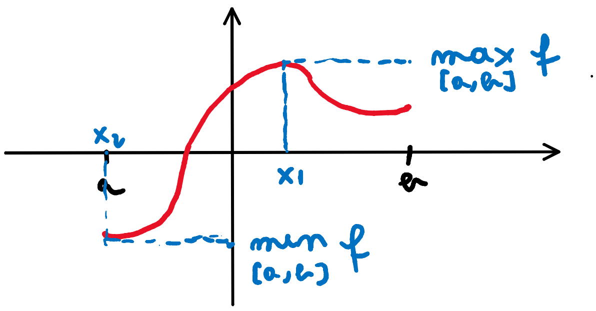


Se f non è continua il teorema non vale.



TEOREMA DI WEIERSTRASS

Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $a \le b$. Sia $f: \overbrace{[a,b]}^{\text{intervallo chiuso e limitato}} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua in $[a,b]$. Allora $\exists\, x_1, x_2 \in [a,b]$ tali che $f(x_1) = \max\limits_{[a,b]} f$ e $f(x_2) = \min\limits_{[a,b]} f$.



Def: Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme e sia $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione. Un punto $x_0 \in A$ si dice un **PUNTO DI MASSIMO ASSOLUTO** per f in A se

$$f(x_0) = \max_A f \quad (\text{cioè } f(x) \le f(x_0) \quad \forall x \in A)$$

Def: Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme e sia $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione. Un punto $x_0 \in A$ si dice un **PUNTO DI MINIMO ASSOLUTO** per f in A se

$$f(x_0) = \min_A f \quad (\text{cioè } f(x) \ge f(x_0) \quad \forall x \in A)$$